פתרון בוחן – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 22/01/25

מרצה: דר' ארז שיינר | משך הבוחן: שעה וחצי | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^7(3x)\,(e^{5x}-1)^3}{(1-\cos(7x))^5\cos^5(2x)}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^7}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\right)^3}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{(7x)^2}{1-\cos(7x)}\right)^5}_{\to 2^5}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos^5(2x)}}_{\to 1}\cdot\frac{(3x)^7\cdot(5x)^3}{(7x)^{10}}=2^5\cdot\frac{3^7\cdot 5^3}{7^{10}}$$

2. חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int\cos\left(\sqrt{x}\right)dx$$

פתרון:

$$\int\cos\left(\sqrt{x}\right)dx=\begin{Bmatrix}t=\sqrt{x} & x=t^2\\ dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx & dx=2tdt\end{Bmatrix}=\int\cos(t)\cdot 2tdt=\begin{Bmatrix}f'=\cos(t) & g=2t\\ f=\sin(t) & g'=2\end{Bmatrix}=$$

$$=2t\sin(t)-\int 2\sin(t)\,dt=2t\sin(t)+2\cos(t)+C=2\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)+2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$$

3. מצאו לכל ערך של הפרמטר $a\in\mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $(x^2+1)e^x=a$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=(x^2+1)e^x-a$$

$$h'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x+1)^2e^x\geq 0$$

כלומר הפונקציה עולה תמיד, ולכן יש לכל היותר חיתוך יחיד עם ציר האיקס. האם חיתוך זה אכן קיים?

נבדוק על ידי חישוב ערכי הפונקציה בקצות תחום העלייה, כלומר באינסוף ובמינוס אינסוף.

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}(x^2+1)e^x-a=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)e^x-a=\{\infty\cdot 0-a,\text{בעייתי}\}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)e^x=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{-x}}=\{t=-x\}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+1}{e^t}\overset{\text{סדרי גודל}}{=}0$$

לכן אם $a\le 0$ הפונקציה לא חותכת את ציר האיקס כי

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-a\ge 0$$

אם $a>0$ אזי גבול הפונקציה משמאל שלילי, לכן יש נקודה מתחת לציר, הגבול מימין חיובי לכן יש נק' מעל הציר.

בין שתי הנקודות הללו יש חיתוך עם הציר לפי ערך הביניים, כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף של רציפות.

סה"כ $a\le 0$ אין פתרון.

$a>0$ פתרון יחיד.

4. תהי f בעלת נגזרת רציפה בכל הממשיים.

הוכיחו או הפריכו: לכל נקודה $c\in\mathbb{R}$ קיימות נקודות $x_1<x_2$ כך ש $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

הפרכה: זה היה בהרצאה!

$$f(x)=x^3$$

$$c=0$$

אזי

$$f'(c)=0$$

אבל לכל $x_1<x_2$ מתקיים כי $x_1^3<x_2^3$ ולכן

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0=f'(c)$$

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2}$, וכי $a_1=1$. נסמן את סדרת האיברים במקומות הזוגיים $b_n=a_{2n}$.

הוכיחו כי b_n מונוטונית יורדת.

נרצה לייצר נוסחת נסיגה לb_n כי זה יקל עלינו

$$b_{n+1}=a_{2n+2}=\frac{1}{a_{2n+1}}+\frac{3}{2}=\frac{1}{\frac{1}{a_{2n}}+\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}=\frac{1}{\frac{1}{b_n}+\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}$$

כעת ארצה להוכיח באינדוקציה את הטענה.

בדיקה:

$$b_1 = a_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{2}{5} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{10}{19} + \frac{3}{2} = \frac{20 + 57}{38} = \frac{77}{38} < \frac{95}{38} = \frac{5}{2}$$

יהי n עבורו $b_{n+1} < b_n$ צ"ל כי

$$b_{n+2} < b_{n+1}$$

צ"ל כי

$$\frac{1}{\frac{1}{b_{n+1}} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} < \frac{1}{\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2}$$

וזה שקול לפי חוק חדות הצמצום (נילי tm)

$$\frac{1}{\frac{1}{b_{n+1}} + \frac{3}{2}} < \frac{1}{\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2}}$$

כעת רוצים לעשות הופכי לשני הצדדים, אך לצורך כך יש להוכיח בצורה מפורשת כי הסדרה חיובית תמיד.

נוכיח באינדוקציה

בדיקה: אכן

$$a_1 = 1 > 0$$

יהי n עבורו $a_n > 0$ לכן

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2} > 0$$

לכן בפרט

$$b_n = a_{2n} > 0$$

נמשיך וצ"ל כי

$$\frac{1}{b_{n+1}} + \frac{3}{2} > \frac{1}{b_n} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} > \frac{1}{b_n}$$

שוב נהפוך ונקבל את אי השיוויון השקול

$$b_{n+1} < b_n$$

וזה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

6. מצאו קירוב לערך $\sin(1)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{2000}$.

שאלה מגוחכת. נפתח את הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ סביב נק' ההשקה המצוייה $x_0 = 0$ ונקרב בנק' הרצוייה $x = 1$

השגיאה עבור הפיתוח מסדר n היא

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$$

ללא תלות בc מתקיים כי

$$\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$$

ולכן

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

עבור $n = 6$ זה מתקיים.

$$P_6(f,0)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

ולכן הקירוב הוא

$$\sin(1) \approx P_6(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$$