אלגברה לינארית תרגול 13

17 בינואר 2021

1 לכסון

תרגילים:

1. מצאו ע"ע ו"ע של:

(א) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

פתרון: הערכים העצמיים הם השורשים של הפולינום האופייני:

$$f_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -6 \\ 3 & \lambda + 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda + 4) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

ולכן הערכים העצמיים הם $2, -1$.

בהינתן ע"ע λ, אז ו"ע הוא $v \in N(\lambda I - A)$, נמצא וקטור כזה:

עבור $\lambda = 2$

$$N \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז לכל $t \neq 0$ נקבל ש־ $\begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}$ הוא ו"ע, ו־ $span \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא המרחב העצמי $V_{\lambda=2} = span \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. כל וקטור שונה מאפס במרחב העצמי הוא וקטור עצמי.

עבור $\lambda = -1$:

$$N \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ב)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: נמצא שורשים של הפולינום האופייני:

$$f_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

זו דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית ולכן נקבל:

$$(\lambda - 1)^2 \lambda^2$$

נקבל ע"ע: $0, 1$.

מרחב עצמי עבור 1:

$$N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב עצמי עבור 0:

$$N(A) = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. מצאו ר"א ור"ג לכל אחד מהע"ע בכל אחת מהמטריצות בשאלה הקודמת.

פתרון: א. יש שם שני ע"ע עם ר"א 1 (החזקה שלהם בפ"א). גם ר"ג של שניהם הוא 1, כי לשניהם מימד המרחב העצמי הוא 1.

ב. עבור ע"ע 1: ר"א שלו הוא 2 (החזקה של $(\lambda - 1)$ בפ"א), ור"ג שלו הוא 2 כי זה מימד המרחב העצמי V_1.

עבור ע"ע 0: ר"א שלו הוא 2 (החזקה של λ בפ"א), ור"ג שלו הוא 1 כי זה המימד של המרחב העצמי V_0.

3. נחשב פ"א: $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-1 & & & \\ & \lambda-1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^3\lambda$$

קיבלנו שני ע"ע: 1 עם ר"א 3, 0 עם ר"א 1. ריבויים גיאומטריים: אם נציב $\lambda = 1$ נקבל 3 שורות אפסים (וכמובן 3 משתנים חופשיים), ולכן ר"ג 3. עבור $\lambda = 0$ קל לראות שר"ג 1, ולו מהסיבה שמתקיים: ר"א $\geq$ר"ג $\geq$1.

4. הגדרת לכסינה: A לכסינה אם יש P הפיכה כך ש־ $P^{-1}AP = D$ עבור D אלכסונית.

5. הוכיחו שהמטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ לכסינה.

פתרון: $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. נראה שמתקיים: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. הוכחה:

$$P^{-1}AP = P^{-1}\left(A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = P^{-1}\left(2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} ,-1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. אלגוריתם ללכסון מטריצה לכסינה:

(א) מצאו את כל הע"ע של A.

(ב) לכל ע"ע λ מצאו בסיס למרחב העצמי. כלומר, בסיס של $N(\lambda I - A)$.

(ג) שימו את הערכים העצמיים על אלכסון. כל ע"ע יחזור על עצמו כמו הריבוי האלגברי שלו (ששווה בלכסינה לריבוי הגיאומטרי שלו), וע"ע שווים יהיו אחד ליד השני. זו האלכסונית D המיוחלת.

(ד) שימו במטריצה P את הוקטורים מהבסיסים שמצאתם, לפי סדר הע"ע ששמתם על אלכסון D.

(ה) התוצאה היא: $P^{-1}AP = D$.

7. משפט: A לכסינה אמ"ם יש n וקטורים עצמיים בת"ל אמ"ם פ"א מתפרק לגורמים לינאריים, ולכל ע"ע מתקיים: ר"א=ר"ג.

8. האם $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכסינה?

פתרון: לא, כי חסר וקטור עצמי אחד, הרי מצאנו בתהליך רק שלושה. או בדרך אחרת: אמנם הפ"א מתפרק לגרומים לינאריים (מל"ל), אך ראינו שר"א של ע"ע 0 הוא 2, ור"ג שלו הוא 1, ולכן לא לכסינה.

9. מי מהבאות לכסינה:

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$

(ב) $B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$

(ג) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$

פתרון: נשים לב שבשלושת המקרים נקבל שהפ"א הוא $(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2$. ולכן יש לנו שני ע"ע: 1 עם ר"א 3, 2 עם ר"א 2. נותר לחשב ריבויים גיאומטריים בכל אחד מהסעיפים:

א. ר"ג של ע"ע 1:

$$N\begin{pmatrix} 0 & & & -1 & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 & & & -1 & \\ & 0 & & & -1 \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = span\{e_1, e_2, e_3\}$$

ר"ג של ע"ע 2:

$$N\begin{pmatrix} 1 & & & -1 & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \\ s \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_5 \right\}$$

קיבלנו עבור שני הע"ע: ר"א=ר"ג ולכן היא לכסינה. נבצע את האלגוריתם:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ומתקיים:

$$P^{-1}AP = D$$

ב. ר"ג של 2:

$$N\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

רואים ש־ $\dim V_2 = 1 < 2$, ולכן B לא לכסינה.

ג. ר"ג של 1:

$$N\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

רואים: $\dim V_1 = 2 < 3$, ולכן C לא לכסינה.

(ד) ראינו ש־A לכסינה. חשבו את A^{5781}. פתרון:

$$D = P^{-1}AP$$

ולכן

$$A = PDP^{-1}$$

ולכן:

$$A^{5781} = \left(PDP^{-1}\right)^{5781} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^{5781}P^{-1} =$$

$$P \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2^{5781} & \\ & & & & 2^{5781} \end{pmatrix} P^{-1} = ...$$