<u>הצעת פתרון – אלגברה לינארית 1 סמסטר קיץ תשפ"ו מועד ב</u>

עדי מכנס

1. (11 נקודות לסעיף) נתבונן במטריצה

$$A=\begin{pmatrix}6 & -6 & -2\\ 4 & -4 & -1\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

השייכת ל $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

א. מצאו בסיס ל $R(A)$.

<u>פתרון:</u>

כדי למצוא בסיס למרחב השורות לוקחים את כל השורות שאינן שורות אפס בצורה המדורגת של A.

$$\begin{pmatrix}6 & -6 & -2\\ 4 & -4 & -1\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2,\ \frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}3 & -3 & -1\\ 4 & -4 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_3,\ R_2-R_3}\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1,\ \frac{1}{4}R_2,\ -R_3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1,\ R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ועל כן בסיס ל $R(A)$ יהיה:

$$B_{R(A)}\coloneqq\{(1,-1,0)^t,(0,0,1)^t\}$$

ב. מצאו בסיס ל $C(A)\cap N(A^2)$.

<u>פתרון:</u>

כדי למצוא בסיס למרחב העמודות של A לוקחים את העמודות <u>מ A</u> שיש בצורה המדורגת שלה איבר פותח. הגענו לצורה המדורגת של A:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ועל כן הבסיס הינו העמודה הראשונה והשלישית:

$$B_{C(A)}\coloneqq\left\{\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

כעת נחשב את A^2:

$$[A^2]_{11}=6\cdot 6+(-6)\cdot 4+(-2)\cdot 4=4$$

$$[A^2]_{12}=6\cdot(-6)+(-6)\cdot(-4)+(-2)\cdot(-4)=-4$$

$$[A^2]_{13}=6\cdot(-2)+(-6)\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)=-2$$

$$[A^2]_{21}=4\cdot 6+(-4)\cdot 4+(-1)\cdot 4=4$$

$$[A^2]_{22}=4\cdot(-6)+(-4)\cdot(-4)+(-1)\cdot(-4)=-4$$

$$[A^2]_{23} = 4 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = -2$$

$$[A^2]_{31} = 4 \cdot 6 + (-4) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 = 0$$

$$[A^2]_{32} = 4 \cdot (-6) + (-4) \cdot (-4) + (-2) \cdot (-4) = 0$$

$$[A^2]_{33} = 4 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) = 0$$

סה"כ:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נדרג קנונית על מנת למצוא פתרון למערכת ההומוגנית:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1,\ \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 = t + \frac{1}{2}s \\ x_2 = t \\ x_2 = s \end{cases}$$

ולכן הפתרון הכללי הינו:

$$\begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(את הוקטור שתלוי ב s כפלתי ב 2 מטעמי נוחות). סה"כ:

$$B_{N(A^2)} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

עכשיו נציג כל אחד מהמרחבים בצורה אלגברית. נתחיל ממרחב העמודות של A:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & | & x \\ 4 & -1 & | & y \\ 4 & -2 & | & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2,\ \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & | & \frac{1}{2}x \\ 4 & -1 & | & y \\ 0 & -1 & | & z - y \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \frac{4}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & | & \frac{1}{2}x \\ 0 & \frac{1}{3} & | & y - \frac{2}{3}x \\ 0 & -1 & | & z - y \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & | & \frac{1}{2}x \\ 0 & \frac{1}{3} & | & y - \frac{2}{3}x \\ 0 & 0 & | & z - y + 3y - 2x \end{array}\right)$$

ולכן נקבל כי:

$$-2x + 2y + z = 0$$

כעת נעבור למרחב האפס של A^2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & | & x \\ 1 & 0 & | & y \\ 0 & 2 & | & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2,\ R_1 - \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & | & x - y - \frac{1}{2}z \\ 1 & 0 & | & y \\ 0 & 2 & | & z \end{array}\right)$$

ולכן נקבל כי:

$$2x - 2y - z = 0$$

(כפלתי ב2). קל לראות שהמשוואה הראשונה היא מינוס המשוואה השנייה ובעצם מתקיים כי $C(A) = N(A^2)$, ולכן הבסיס לחיתוך יהיה בסיס ל $C(A)$ או בסיס ל $N(A^2)$ (זה לא משנה). לכן נבחר:

$$B_{C(A)\cap N(A^2)} \coloneqq \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ג. הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש $C(B) = C(A),\ N(B) = R(A)$.

<u>פתרון:</u>

<u>נפריך</u> את הטענה. נניח בשלילה שקיימת B כנ"ל. לכן ממשפט הדרגה:

$$\operatorname{rank} B + \dim N(B) = 3$$

אבל:

$$\operatorname{rank} B = \dim C(B) = \dim C(A) = 2$$

לפי סעיף ב'. כמו כן:

$$\dim N(B) = \dim R(A) = 2$$

לפי סעיף א', אך

$$2 + 2 \neq 3$$

בסתירה.

2. (9 נקודות לסעיף) התבוננו במרחב $W = \{\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \operatorname{tr}(A) = 0 \,\}$. נתונות המטריצות

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix}a^2 & 1\\a & 2a+1\end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix}a^2+a & 2\\1 & -a^2-2a-1\end{pmatrix}$$

כאשר a פרמטר ממשי.

א. קבעו לכל של a האם $\{A_1, A_2, A_3\}$ הוא בסיס ל W.

<u>פתרון:</u>

דבר ראשון צריך לבדוק עבור אלו ערכי a מתקיים כי $A_1, A_2, A_3 \in W$. ברור כי A_1 שייכת ל W. עכשיו A_2 שייכת ל W אמ"מ:

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$(a+1)^2 = 0$$

$$a = -1$$

באופן דומה, A_3 שייכת ל W אמ"מ:

$$a^2 + a - a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$-a - 1 = 0$$

$$-a = 1$$

$$a = -1$$

ואכן רק עבור $a = -1$ בכלל אפשר לדבר על האם המטריצות לעיל בסיס. כלומר, נקבל כי:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תחילה נבדוק בת"ליות. כדי לעשות כן, אפשר לדבר על הקואורדינטות של המטריצות לעיל בבסיס הסטנדרטי למרחב המטריצות – כלומר נבדוק האם המטריצות "המשוטחות" בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_1, R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועל כן הקבוצה הזו הינה בת"ל. כעת נראה כי הממד של W הוא 3 ובכך נראה שהקבוצה הזו היא בסיס ל W. תהי מטריצה כלשהי ב W.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$$

לכן $a + d = 0$, ולכן $a = -d$. כלומר כל מטריצה ב W ניתנת לכתיבה בצורה:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

והרי:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

וכמו כן נראה כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועל כן אכן $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ אכן בסיס ל W, ומכאן שהמימד שלו 3, ועל כן מהשלישי חינם גם הקבוצה הנתונה בסיס ל W.

סה"כ, **רק** עבור $a = -1$ הקבוצה לעיל בסיס ל W.

ב. לכל ערך של a שעבורו $\{A_1, A_2, A_3\}$ הוא בסיס ל W, מצאו מטריצה $A_4 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

בסיס ל $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

<u>פתרון:</u>

ראינו בסעיף הקודם שרק עבור $a = -1$ הקבוצה לעיל בסיס, ולכן נציב $a = -1$. נצטרך להשלים את הקבוצה:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לבסיס. על מנת לעשות כן, "נשטח" (בעזרת קואורדינטות ע"פ הבסיס הסטנדרטי, באופן דומה לסעיף א') את המטריצות ונשימם בשורות, וניקח את e_i כך שבמשתנה ה i אין איבר פותח.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&-1&-1\\0&2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}$$

לכן, נוסיף את המטריצה שהקואורדינטות שלה ע"פ הבסיס הסטנדרטי הינה e_4, היינו, נבחר:

$$A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

3. (9 נקודות לסעיף) יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו B,C שני בסיסים סדורים של V.
תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכיחו או הפריכו:

א. אם במטריצה $[T]_C^B$ יש שורת אפסים אז במטריצה $[T]_C^C$ יש שורת אפסים.

<u>פתרון:</u>

<u>נוכיח</u> את הטענה. נבחין כי:

$$[T]_C^C=[T]_C^B[I]_B^C$$

אבל ב $[T]_C^B$ יש שורת אפסים, ולכן כך גם ב $[T]_C^C$. (הטענה היא שאם במטריצה A השורה ה i הינה שורת אפסים, אזי לכל מטריצה B מתקיים כי השורה ה i ב AB היא שורת אפסים, והוכחה לכך אפשר למצוא בסרטון <u>הזה</u>).

ב. אם במטריצה $[T]_C^B$ יש שורת אפסים אז במטריצה $[T]_B^B$ יש שורת אפסים.

<u>פתרון:</u>

<u>נפריך</u> את הטענה. נבחר $V=\mathbb{R}^2$ (מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) וכן בסיסים:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ונגדיר העתקה לינארית באמצעות משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

כעת:

$$C_1([T]_C^B)=\left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_C=\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

שהרי:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\mathbf{0}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

באופן דומה:

$$C_2([T]_C^B)=\left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_C=\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

ובמטריצה זו ישנה שורת אפסים. אבל:

$$C_1([T]_B^B) = \left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$C_2([T]_B^B) = \left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

אך בה אין שורת אפסים.

4. (9 נקודות לסעיף) ענו על הבאים:

א. יהיו a,b,c פרמטרים ממשיים ונסתכל על

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ a & b & c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

נגדיר עוד

$$W = \{\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists B \in \mathbb{R}^{3\times 3}: \det(AA^t) = \det(-BB^t)\,\}$$

הוכיחו כי W תת מרחב ומצאו לו בסיס.

<u>פתרון:</u>

תחילה, נפשט את הקריטריון של W:

$$(a,b,c) \in W$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{3\times 3}:\ \det(AA^t) = \det(-B^tB)$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{3\times 3}:\ (\det A)^2 = (-1)^3(\det B)^2$$

[שהרי $\det AA^t = \det A \cdot \det A^t = (\det A)^2$. כמו"כ מינוס אחת יוצא בחזקת סדר המטריצה]. שימו לב שהביטוי בצד שמאל הוא אי-שלילי והביטוי בצד ימין הוא אי-חיובי. מכאן נובע:

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{3\times 3}:\ (\det A)^2 = 0 \wedge (-1)^3(\det B)^2 = 0$$

תמיד אפשר לבחור $B = 0$ ובעצם מה שנותר לנו הוא התנאי:

$$\Leftrightarrow \det A = 0$$

כעת נוכיח שהקריטריון המקוצר מתקיים.

- עבור $(a,b,c) = (0,0,0)$ מתקיים כי:

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

בוודאי מטריצה לא הפיכה, ועל כן מתקיים כי $\det A = 0$ מה שאומר ש $(0,0,0) \in W$.

- יהיו $(a,b,c),(d,e,f) \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נוכיח כי $(a+\alpha d, b+\alpha e, c+\alpha f) \in W$. אכן, כיוון שדטרמיננטה היא לינארית בשורה אחת נקבל כי:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a+\alpha d & b+\alpha e & c+\alpha f \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} + \alpha \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

כעת נותר למצוא ל W בסיס. כזכור, A לא תהיה הפיכה אם $\operatorname{rank} A \neq 3$. לכן נדרוש כי:

$$(a,b,c) \in \operatorname{span}\{(-1,2,1),(-1,1,1)\}$$

שהרי $\{(-1,2,1),(-1,1,1)\}$ בת"ל, שכן על ידי דירוג:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2, R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ובסה"כ בסיס יהיה:

$$\{(-1,2,1),(-1,1,1)\}$$

ב. תהא $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ כך ש $\operatorname{rank}(A) = 3$. הוכיחו או הפיכו: A^tA מטריצה שאינה הפיכה.

<u>פתרון:</u>

<u>נוכיח</u> את הטענה. כיוון ש $\operatorname{rank} A = 3$ אז $\operatorname{rank} A^t = 3$ כנ"ל. כעת:

$$\operatorname{rank} A^tA \leq \min\{\operatorname{rank} A^t, \operatorname{rank} A\} = 3 < 4$$

אבל $A^tA \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ וגם $\operatorname{rank} A^tA \neq 4$ ומכאן ש A^tA אינה הפיכה. משל ■.

5. (9 נקודות לסעיף) ענו על הבאים:

א. יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו השדה $\mathbb{F}$. נסמן $\dim V = n, \dim W = m$ ($1 \leq n, m$ טבעיים).
תהא $T: V \to W$ ה"ל.
הוכיחו: אם T על אז קיימת ה"ל $S: W \to V$ כך ש $T \circ S = I$, כאשר I היא העתקת הזהות על W.

<u>פתרון:</u>

יהי $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ל W. כיוון ש T על, לכל $1 \leq i \leq m$ קיים $u_i \in V$ כך ש:

$$Tu_i = w_i$$

לכן נגדיר אופרטור $S: W \to V$ באמצעות משפט ההגדרה על ידי:

$$\forall 1 \leq i \leq m: \; Sw_i = u_i$$

ואכן נוכיח כי $TS = I$. מספיק לנו להראות שוויון של הבסיסים, מהוכחת היחידות של משפט ההגדרה. אכן, יהי $1 \leq i \leq m$. אזי:

$$TSw_i = T(Sw_i) = T(u_i) = w_i$$

מצד שני, ברור כי לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים כי $Iw_i = w_i$ ולכן נקבל כי $TS = I$ כמבוקש, משל ■.

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ונגדיר את ההעתקה $T_A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ של כפל במטריצה A (כלומר $T_A(v) = Av$).
הוכיחו או הפריכו: אם T_A על אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ כך ש $AB = I_m$, כאשר I_m היא מטריצת היחידה.

<u>פתרון:</u>

<u>נוכיח</u> את הטענה. כיוון ש T_A על נובע כי $C(A) = \mathbb{F}^m$. היינו:

$$C(A) = \{ Av \mid v \in \mathbb{F}^n \} = \mathbb{F}^m$$

כיוון שכך, קיימים $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{F}^n$ כך ש:

$$\forall 1 \leq i \leq m\colon\ Av_i = e_i$$

ונגדיר:

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{pmatrix}$$

וכעת נוכיח כי $AB = I_m$. יהי $1 \leq i \leq m$. אכן:

$$C_i(AB) = A \cdot C_i(B) = Av_i = e_i$$

וסיימנו.

דרך נוספת: אפשר להשתמש בסעיף א' ולהגיד שקיימת העתקה $S\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ כך ש $T_A S = I$. מנגד, אפשר להסתכל על המטריצה המייצגת של S לפי הבסיס הסטנדרטי המתאים (נסמנו כאן ב C_1, C_2) ולקבל כי $[T_A]_{C_2}^{C_1} \cdot [S]_{C_1}^{C_2} = I_m$. סה"כ אם נבחר $B = [S]_{C_1}^{C_2}$ נקבל:

$$AB = I_m$$

כמבוקש.

משל ■.