אלגברה לינארית ־ תרגול 3

2 בנובמבר 2020

1 דירוג

תהי A מטריצת המקדמים בממ"ל, כתבו נכון או לא נכון:

1. אם ב־A יש שורת אפסים אז יש אינסוף פתרונות למערכת. לא נכון, לדגומא $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & & \end{array}\right)$

2. אם יש אינסוף פתרונות למערכת אז ב־A יש שורת אפסים. לא נכון, לדוגמא $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & 1 & & 0 \end{array}\right)$ ואז לכל t נקבל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ פתרון, ולכן יש אינסוף פתרונות.

3. אם יש אינסוף פתרונות, אז בצורה המדורגת של A יש שורת אפסים. לא נכון $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$ יש כאן שני משתנים חופשיים.

4. אם יש יותר שורות מעמודות, אז יש שורות אפסים בצורה המדורגת. נכון. מספר האיברים המובילים חסום במספר העמודות, ולכן בשורות שמעבר למספר העמודות נקבל רק אפסים. למשל עבור $\begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & \end{pmatrix}$

5. אם יש יותר עמודות משורות ואין שורת סתירה אז יש אינסוף פתרונות. נכון. הוכחה: אין שורת סתירה אז יש לפחות פתרון אחד. כיון שמספר האיברים המובילים חסום במספר שורות המטריצה (כי יכול להיות איבר מוביל אחד בכל שורה, לא יותר), נקבל שיש עמודות שאין בהם איבר מוביל, ואז המשתנה המתאים לעמודה זו הוא חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות.

2 אלגברת מטריצות

2.1 חיבור וכפל בסקלאר

בהינתן מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אז החיבור שלהן:

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

כלומר, חיבור כניסה כניסה.
בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, \alpha \in \mathbb{F}$ אז:

$$(\alpha A)_{i,j} = \alpha \cdot A_{i,j}$$

כלומר, כופלים כל כניסה וכניסה ב־α.
דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 13 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

2.2 הגדרה ראשונית לכפל מטריצות

כזכור הגדרנו כפל מטריצות באופן הבא: הכפל AB מוגדר כאשר מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B (כלומר, נניח $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$, ואז $AB \in \mathbb{F}^{m\times p}$), ואז מתקיים:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

לדוגמא:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) = 6 \\ \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{1,1} = \sum_{k=1}^{3} A_{1,k} \cdot B_{k,1} = A_{1,1}\cdot B_{1,1} + A_{1,2}\cdot B_{2,1} + A_{1,3}\cdot B_{3,1} = 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 6 = 41 & \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{3,2} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

תכונות של חיבור, כפל בסקלאר וכפל מטריצות:

1. קיבוץ: כאשר הכפל מוגדר מתקיים: $(AB)C = A(BC)$.
2. פילוג: כאשר הפעולות מוגדרות מתקיים: $A(B+C) = AB + AC$.
3. הוצאת סקלאר: כאשר הכפל מוגדר: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
4. חילוף בחיבור: כאשר החיבור מוגדר: $A + B = B + A$.
5. **שימו לב!** לא מובטח חילוף בכפל. ראשית, נדגיש שלא תמיד הכפל מוגדר בשני הכיוונים. למשל בדוגמא השנייה לעיל. וגם כאשר הוא מוגדר בשני הכיוונים, לא תמיד התוצאה היא מאותו סדר. למשל עבור $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ אז נקבל: $AB \in \mathbb{F}^{m\times m}, BA \in \mathbb{F}^{n\times n}$. וגם כאשר התוצאה מאותו סדר, לא מובטח לנו שנקבל את אותה התוצאה, למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \end{pmatrix}$$

תרגילים:

1. אחת הדוגמאות הנפוצות לשימוש בכפל מטריצות, זה ממ"ל. נניח ש־ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ היא מטריצת המקדמים של ממ"ל, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. אז המערכת בעצם מיוצגת ע"י הכפל:

$$A \cdot x = b$$

לדוגמא:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{cases} 6x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 3 \end{cases}$$

נסמן ב־ $L = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = b\}$ את אוסף פתרונות המערכת. נסמן ב־ $H = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0 \in \mathbb{R}^{m\times 1}\}$ את אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(א) נניח ש־ L לא ריקה. יש לפחות פתרון אחד למערכת, נסמנו v_0. הוכיחו:

$$L = \{v_0 + v : v \in H\}$$

(ב) מצאו מקרה בו אין פתרון למערכת $Ax = b$ אבל יש פתרון יחיד להומ' המתאימה $Ax = 0$.

במערכת זו $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ יש שורת סתירה, ולכן אין פתרון למערכת. במערכת ההומ' המתאימה $Ax = 0$ אין משתנה חופשי, ולכן יש פתרון יחיד ־ פתרון האפס.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ג) מצאו מקרה בו אין פתרון למערכת $Ax=b$ אבל יש אינסוף פתרונות להומ' המתאימה $Ax=0$.

במערכת $Ax=b$ יש שורת סתירה, ולכן אין פתרון למערכת. במערכת ההומ' $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ המתאימה $Ax=0$ יש משתנה חופשי, ולכן יש אינסוף פתרונות, הלא הם:

$$H=\{\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\}$$

(ד) נתון $m=n$, וכן שאין פתרונות למערכת $Ax=b$. כמה פתרונות יש למערכת ההומ' המתאימה?

פתרון: אינסוף. בגלל שאין פתרון למערכת נקבל שורת סתירה, זאת אומרת שבצורה המדורגת של A יש שורת אפסים. בשורה זו אין איבר מוביל. כיון שמספר השורות שווה למספר העמודות יוצא שיש עמודה ללא איבר מוביל, והמשתנה המתאים לעמדה זו הוא חופשי. לכן יש אינסוף פתרונות.

2.3 כפל "שורה" ו"עמודה"

נתחיל מדוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&0&0\\2&8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot0+3\cdot8 & 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2&8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&24&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&26&4\end{pmatrix}$$

באופן כללי, נרצה לחשב את השורה ה־i של הכפל AB. כלומר, נרצה לחשב את

$$R_i(AB)=R_i(A)\cdot B$$

ואם נסמן

$$B=\begin{pmatrix}R_1(B)\\R_2(B)\\\vdots\\R_n(B)\end{pmatrix}$$

אז:

$$R_i(AB)=R_i(A)\cdot B=\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}\cdot R_k(B)$$

לדוגמא:

$$R_3\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&-2\\1&1&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}}_{B}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{pmatrix}2&1&-3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\end{pmatrix}$$

בדומה, כפל עמודה:

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B)$$

ואם נסמן

$$A = \begin{pmatrix} C_1(A) & \cdots & C_n(A) \end{pmatrix}$$

אז נוכל להמשיך:

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = \sum_{k=1}^{n} C_k(A) \cdot B_{k,j}$$

$$C_2\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot 0 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$