תרגול 8 לינארית

7 בדצמבר 2020

1 בסיס ומימד

תרגילים:

1. עבור $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a-3b-5c=d \\ 4b+8c-2d=2a \end{matrix} \right\}, W_2 = span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ מצאו בסיס ל־ $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$.

פתרון: כדי למצוא בסיס צריך קבוצה בת"ל שפורשת את המרחב. עבור W_2 נסמן $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. נתון $span(S) = W_2$ ולכן S פורשת את W_2. לכן, אם נוכיח ש־ S בת"ל נקבל ש־ S בסיס של W_2. קל לראות שאם $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ אז $\alpha = 0$ בגלל הרכיב הראשון, $\beta = 0$ בגלל הרכיב הרביעי. ולכן הוקטורים בתל. אגב, קיבלנו שהמימד של W_2 הוא 2.

לגבי W_1: תת־מרחב זה הוא בעצם אוסף פתרונות של המערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases} a-3b-5c-d=0 \\ 2a-4b-8c+2d=0 \end{cases}$$

נמצא זאת ע"י דירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ 2 & -4 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+3R_2 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן, אוסף פתרונות המערכת: כיון שיש לנו שניים חופשיים, ניתן לכל אחד פרמטר:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t-5s \\ -2s-t \\ t \\ s \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

קל לראות שהוקטורים הללו בת"ל, כי אם $\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ אז נשים לב שנקבל:

$$\begin{pmatrix}\\\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן $\alpha=\beta=0$. ולכן קיבלנו בסיס ל־ W_1. המימד הוא 2.

נותר למצוא בסיס לחיתוך $W_1\cap W_2$: אם נמצא את W_2 כאוסף פתרונות מערכת הומ' יהיה לנו קל. נעשה זאת: נבדוק מה התנאים על $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ כך ש־ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, זה נותן את המערכת:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&0&a\\-1&1&b\\1&0&c\\0&1&d\end{array}\right)\xrightarrow[R_2+R_3-R_4\to R_2]{R_1-2R_3\to R_1}\left(\begin{array}{cc|c}0&0&a-2c\\0&0&b+c-d\\1&0&c\\0&1&d\end{array}\right)$$

לא ניתן להגיע לעוד שורות אפסים, לכן נקבל שהתנאים הם:

$$\begin{cases}a-2c=0\\b+c-d=0\end{cases}$$

כעת נוכל לחזור לחיתוך. כדי שוקטור יהיה גם ב־W_1 וגם ב־W_2 הוא צריך לקיים גם את התנאים של W_1 וגם את התנאים של W_2. ולכן צריך לקיים 4 משוואות:

$$\begin{cases}a-3b-5c-d=0\\2a-4b-8c+2d=0\\a-2c=0\\b+c-d=0\end{cases}$$

כלומר, החיתוך זה בדיוק אוסף הפתרונות של המערכת הזו. נפתור:

$$\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\2&-4&-8&2\\1&0&-2&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&-2&5\\0&1&1&2\\1&0&-2&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4-R_2\to R_4]{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&-2&5\\0&1&1&2\\0&0&0&-5\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-2&5\\0&1&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2-2R_3\to R_2]{R_1-5R_3\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת נקבל:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כלומר, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ הבסיס לחיתוך (וקטור שונה מאפס תמיד בת"ל).

הערה: לא ניתן לחתוך את הבסיסים, כי יכול להיות שחיתוך הבסיסים ריק אך תתי המרחבים שווים. כמו למשל $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ אלו שני בסיסים זרים לאותו תת־מרחב (ציר ה־x).

2. יהא V מ"ו, יהיו $W_1 \subseteq W_2$ שני ת"מ. הוכיחו או הפריכו: כל בסיס של W_2 ניתן לצמצום לבסיס של W_1.

פתרון: המשפט אומר: כל קבוצה S שפורשת את V ניתן לצמצם לבסיס. יהי $B \subset W_2$ בסיס ל־W_2. הוא כמובן פורש את W_2, אם $W_1 \neq W_2$ (ובפרט המימד קטן יותר) אז אנחנו לא עוסקים בתנאי המשפט - לא בטוח שיש תת קבוצה $B' \subset B$ שפורשת את W_1. בקיצור: הפרכה:

$$W_1 = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, W_2 = \mathbb{R}^2$$

אני רוצה למצוא בסיס ל־W_2 שלא ניתן לצמצם אותו לבסיס של W_1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = B$ (קל לראות בת"ל, ויש שני איברים ולכן בסיס ל־W_2). כמובן, אף אחד משני וקטורים אלו לא בסיס ל־W_1, ולכן לא ניתן לצמצם את B לבסיס של W_1.

3. נתבונן במרחב $V = \mathbb{C}_2[x] = span\{1, x, x^2\}$. ונגדיר $S = \{1 + x, 1 + ix, ix^2, 1 + ix^2\}$. מצאו תת קבוצה $S' \subset S$ המהווה בסיס ל־V.

פתרון: כיון שאנחנו יודעים שזו קבוצה ת"ל, נמצא צ"ל לא טריוויאלי שנותן את 0, וזה יעזור לנו לדעת את מי ניתן "לזרוק":

$$a(1 + x) + b(1 + ix) + c(ix^2) + d(1 + ix^2) = 0$$

$$1(a + b + d) + x(a + ib) + x^2(ic + id) = 0$$

נעשה השוואת מקדמים לפי הדרגה ונקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ a + ib = 0 \\ ic + id = 0 \end{cases}$$

נדרג ונמצא פתרון לא טריוויאלי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow[-iR_3 \to R_3]{\frac{1}{i-1} R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז נקבל שלכל d הצירוף $c = -d, b = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)d, a = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)d$. בכל מקרה, כיון ש־$d$ חופשי נקבל שניתן להציב בו 1, ואז

$$a(1 + x) + b(1 + ix) + c(ix^2) + 1(1 + ix^2) = 0$$

נעביר את השאר אגף ונקבל:

$$1+ix^2=-a(1+x)-b(1+ix)-c(ix^2)$$

זאת אומרת $1+ix^2\in span\{1+x,1+ix,ix^2\}$, ולכן ניתן "לזרוק" אותו. נותרנו עם שלושה וקטורים $B=\{1+x,1+ix^2\}$ שפורשים את V שמימד 3, ומהשלישי חינם הם גם בת"ל, ולכן בסיס.

4. במרחב $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ נגדיר:

$$S=\left\{A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

השלימו את S לבסיס של V.

פתרון: טיפלנו במקרה הזה. אנחנו יודעים שהמימד של V הוא 4. ראינו בתרגול קודם שקבוצה בת"ל, לכן מספיק למצוא וקטור אחד נוסף ש־ $A_4\notin span(S)$. בתרגול הקודם טיפלנו גם בזה, וראינו: נבדוק מהם הצ"ל האפשריים של S: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\alpha A_1+\beta A_2+\gamma A_3$ נקבל מערכת:

$$\begin{cases}a=\alpha+2\beta+\gamma\\b=\alpha-\gamma\\c=\beta+\gamma\\d=\alpha+3\beta\end{cases}$$

נפתור את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\1&0&-1&b\\0&1&1&c\\1&3&0&d\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-R_1\to R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\1&0&-1&b\\0&1&1&c\\0&1&-1&d-a\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&-2&-2&b-a\\0&1&1&c\\0&1&-1&d-a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&0&0&b-a+2c\\0&1&1&c\\0&1&-1&d-a\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-R_3\to R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&0&0&b-a+2c\\0&1&1&c\\0&0&-2&d-a-c\end{array}\right)$$

לכן יש פתרון למערכת אם ורק אם אין שורת סתירה, שזה קורה אם ורק אם $b-a+2c=0$ (כי קל לראות שלא ניתן להגיע לעוד שורת סתירה - כי הגענו למטריצה משולשית). לכן כדי למצוא מטריצה שלא נפרשת ע"י S נבחר a,b,c,d שלא מקיימים את התנאי. למשל:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\notin span(S)$$

ולכן:

$$B=\left\{A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

כיון ש־B בת"ל (הסבר: S הייתה בת"ל, והוספנו וקטור A_4 שלא נפרש ע"י S. לפי משפט $S\cup\{A_4\}$ בת"ל) ובעלת 4 איברים, אז לפי השלישי חינם B גם פורשת את V ולכן בסיס.

5. השלימו את $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. הציעו בתרגיל הקודם לשים את הוקטורים בעמודות מטריצה, לדרג, ולראות איזה וקטור חסר. זה עלול לגרום לטעויות, כמו פה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז לפי השיטה הזו נצטרך לבחור את $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אבל הוא כבר נמצא, אז לא יכול להשלים לבסיס.