מבחן באנליזת פורייה ויישומים 88-235 מועד ב' תשפ"ו – 30.8.2026
מרצה – ארז שיינר | זמן המבחן – 3 שעות | משקל כל שאלה: 27 נק'

**<u>שאלה ראשונה:</u>**

נביט בפונקציה $f(x)=x\sin x, \quad -\pi \le x \le \pi$

א. מצאו את טור הפורייה של $f$. מותר להשתמש בזהות הבאה:

$$\sin x\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\sin\big((n+1)x\big)-\sin\big((n-1)x\big)\right]$$

ב. חשבו את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

ג. חשבו את הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}$$

**<u>שאלה שנייה:</u>**

נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\pi e^{-x}, & x\ge 0,\\ \pi e^{x}, & x<0.\end{cases}$$

א. חשבו את התמרת הפורייה $F[f](s)$.

ב. מצאו פונקציה $h(x)$ עבורה

$$F[h](s)=\frac{1}{(1+s^2)^2}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+s^2)^2}\,ds$$

**<u>שאלה שלישית:</u>**

נתון וקטור הדגימות $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (5,3,-1,1)$ של האות $f(t)$. קצב הדגימה הוא 8 דגימות לשנייה, כלומר

$$a_p = f\left(\frac{p}{8}\right), \qquad p = 0,1,2,3$$

א. חשבו את ה-DFT של הווקטור.

ב. מן האות הורידו את הגל $g(t) = 3\cos(12\pi t)$, וקיבלו $h(t) = f(t) - g(t)$.
חשבו את ה-DFT של וקטור הדגימות של $h$.

**<u>שאלה רביעית:</u>**

תהי $f$ בעלת נגזרת רציפה בכל הממשיים, ונגדיר

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(2\pi + x) & x < 0 \end{cases}$$

וננית כי טור הפורייה של $g$ הוא

$$g \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

א. הוכיחו או הפריכו:

$$f(\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

ב. הוכיחו או הפריכו:

$$f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

## המכפלה הפנימית

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}$$

## מקדמי פורייה

$$a_n = \langle f, \cos(nx)\rangle, \qquad n \geq 0$$
$$b_n = \langle f, \sin(nx)\rangle, \qquad n \geq 1$$

## טור הפורייה

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

## משפט דיריכלה

תהי $f\in V$ ותהי $x_0\in\mathbb{R}$. נניח שלהמשך המחזורי של f קיימים ב-$x_0$ שני הגבולות החד-צדדיים ושתי הנגזרות החד-צדדיות, וכולם סופיים. נסמן את הגבולות ב-$L_1,L_2$. אזי טור הפורייה מתכנס ל-

$$\frac{L_1 + L_2}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx_0) + b_n\sin(nx_0)\right)$$

בפרט, אם ההמשך המחזורי של f רציף ב-$x_0$, אזי טור הפורייה מתכנס ל-$f(x_0)$.

## משפט שיוויון פרסבל

לכל $f \in \mathbb{V}$ מתקיים כי

$$||f||^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2$$

## המקדמים של טור הקוסינוסים וטור הסינוסים

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

## התמרת פורייה

הגדרה: תהי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ נגדיר את התמרת פורייה שלה להיות הפונקציה

$$F(s)=\mathcal{F}(f)(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}dx$$

## תכונות של התמרת פורייה

$$\mathcal{F}(f_1+cf_2)=\mathcal{F}(f_1)+c\mathcal{F}(f_2)$$

$$\mathcal{F}(f')(s)=is\mathcal{F}(f)(s)$$

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f)(s)=-i\mathcal{F}\big(xf(x)\big)$$

## משפט ההתמרה ההפוכה

משפט: תהי פונקציה f כך שהאינטגרל של |f(x)| על $\mathbb{R}$ מתכנס. בכל נקודה x שבה הנגזרות החד-צדדיות קיימות וסופיות, נסמן את הגבולות החד-צדדיים ב-$L_1,L_2$. אזי

$$\frac{L_1+L_2}{2}=\lim_{n\to\infty}\int_{-n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}F\,[f](s)e^{isx}\,ds$$

## קונבולוציה

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

$$\mathcal{F}(f*g)=2\pi\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$$

## תדרים

התדר של $e^{-isx}$ הוא $\frac{|s|}{2\pi}$

## התמרה בדידה

$$u_n(t) = e^{2\pi i \cdot n \cdot \frac{T}{N} t}$$

$$e_n = \left(u_n(0), u_n\left(\frac{1}{T}\right), \dots, u_n\left(\frac{N-1}{T}\right)\right) = \left(1, e^{2\pi i \cdot \frac{n}{N}}, \dots, e^{2\pi i \cdot \frac{n}{N} \cdot (N-1)}\right)$$

$$e_{N-n} = e_{-n}$$

תהי סדרה $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ נגדיר את התמרת הפורייה הבדידה שלה (*DFT*) להיות הסדרה $A_0, \dots, A_{N-1} \in \mathbb{C}$ ע"י

$$A_k = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \cdot e^{-2\pi i \cdot k \frac{p}{N}}$$

## התמרה בדידה הפוכה

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} A_p e^{\frac{2\pi i p k}{N}}$$

עבור $N$ אי זוגי הדגימות של הגלים

$$e_{-\frac{N-1}{2}}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{\frac{N-1}{2}}$$

מתאימות לטווח התדרים

$$\frac{N-1}{2} \cdot \frac{T}{N}, \dots, \frac{T}{N}, 0, \frac{T}{N}, \dots, \frac{N-1}{2} \cdot \frac{T}{N}$$

עבור $N$ זוגי הדגימות של הגלים

$$e_{-\frac{N-2}{2}}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{\frac{N-2}{2}}, e_{\frac{N}{2}}$$

מתאימות לטווח התדרים

$$\frac{N-2}{2} \cdot \frac{T}{N}, \dots, \frac{T}{N}, 0, \frac{T}{N}, \dots, \frac{N-2}{2} \cdot \frac{T}{N}, \frac{N}{2} \cdot \frac{T}{N}$$

## אות ממשי

בהינתן דגימות של אות ממשי אם $X_k, X_{-k}$ הם ערכים ההתמרת פורייה הבדידה, יוצא שהאמפליטודה של הגל הממשי היא

$$\frac{2}{N} |X_k|$$

כמו כן, הזוית של $X_k$ היא הפאזה של הגל!