תרגיל 12

להגשה ב־ד' שבט (15.01) או ו' שבט (17.01) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. תהא $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\5&4&-8\\-16&10&7\end{pmatrix}$ חשב את הפולניום האופיני של A ובעזרת משפט קיילי המילטון חשב את A^{-1}

פתרון:

$$\begin{aligned}f_A(\lambda) &= |\begin{pmatrix}\lambda&-1&0\\-5&\lambda-4&8\\16&-10&\lambda-7\end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\\lambda-9&\lambda-4&8\\6&-10&\lambda-7\end{pmatrix}|\\ &= |\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\\lambda-1&\lambda-4&8\\\lambda-1&-10&\lambda-7\end{pmatrix}| = (\lambda-1)|\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-4&8\\1&-10&\lambda-7\end{pmatrix}|\\ &= (\lambda-1)|\begin{pmatrix}1&0&0\\1&\lambda-3&8\\1&-9&\lambda-7\end{pmatrix}| = (\lambda-1)[(\lambda-3)(\lambda-7)+72]\\ &= (\lambda-1)(\lambda^2-10\lambda+83) = \lambda^3-11\lambda^2+93\lambda-83\end{aligned}$$

משפט קיילי אומר ש $A^3-11A^2+93A-83I=0$ ולכן $A(A^2-11A+93I)=83I$ ומכאן ש $A^{-1}=\frac{(A^2-11A+93I)}{83}$

2.

(א) תהא $A=\begin{pmatrix}a_1&*&\cdots&*\\0&a_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&*\\0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכל $a_i\neq a_j$ $i\neq j$

הוכח: A לכסינה.

פתרון: $f_A(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda-a_k)$ כלומר יש n ע"ע שונים $\lambda_i=a_i$. לכל ע"ע יש לפחות ו"ע אחד. כלומר יש לפחות n ו"ע. כיוון שכל ו"ע מתאמים לע"ע שונה הם בת"ל. קיבלנו של A יש n ו"ע בת"ל ולכן בסיס. $\Leftarrow$ A לכסינה.

(ב) תרגיל: הוכח ש $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\7&2&0\\0&\sqrt{17}&3\end{pmatrix}$ מטריצות דומות (היעזר בסעיף א' , אין צורך בחישובים).

פתרון: לפי סעיף א' ($\{1,2,3\}$ע"ע של A וגם של B) + ממה שכבר ראינו קיימת P_1, P_2 הפיכות כך ש $P_1AP_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P_2^{-1}BP_2$ ולכן $A = P_1^{-1}P_2^{-1}BP_2P_1$ נגדיר $P = P_2P_1$ ואז $A = P^{-1}BP$ כלומר מטריצות דומות.

3. לכסן א"ג את $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

פתרון: נמצא ע"ע:

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}| \\ &= (\lambda-4)|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}| = (\lambda-4)|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}| \\ &= (\lambda-4)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

כלומר $\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = 1$ ע"ע. נמצא ו"ע
עבור $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{aligned} N(A-4I) &= N(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= N(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}) \end{aligned}$$

נבחר ו"ע נורמלי $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור $\lambda_2 = 1$:

$$N(A-I) = N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

נמצא בסיס א"נ ל $N(A-I)$ בעזרת גרם שמידט:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >}{|| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ||^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

כלומר $\begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ א"ג ואחרי נרמול

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3.5}} \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ בסיס א"נ.

כעת נגדיר $P = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1.5}{\sqrt{3.5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3.5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{0.5}{\sqrt{3.5}} \end{pmatrix}$ ואז $P^t A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ פרק את A בשיטת SVD

פתרון:

חלק א:

(א) $$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$\begin{aligned} f_{A^t A}(\lambda) &= |\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \lambda-6 & \lambda-6 & \lambda-6 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{pmatrix}| \\ &= (\lambda-6)|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{pmatrix}| = (\lambda-6)|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}| \\ &= \lambda^2 \quad (\lambda-6)| \end{aligned}$$

ולכן $\lambda_1 = 6 \geq \lambda_2 = 0$ שני ע"ע

(ג) ו"ע: עבור $\lambda_1 = 6$

$$N(A^t A - 6I) = N(\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix})$$

$$= N(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\})$$

נבחר ו"ע מנורמל $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ו"ע: עבור $\lambda_2 = 0$

$$N(A^tA - 0I) = N(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = span(\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\})$$

נבחר בסיס א"נ ל $V_{\lambda_2=0}$ כמו בשאלה 3 $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{3.5}}\begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

(ד) נגדיר $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1.5}{\sqrt{3.5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3.5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{0.5}{\sqrt{3.5}} \end{pmatrix}$

חלק ב:

(ה) נגדיר $\mu_1 = \sqrt{6}, \mu_2 = 0$ ונגדיר

$$u_1 = \frac{Av_1}{\mu_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(זה וקטור מנורמל)

(ו) נשלים לבסיס א"נ ל $\mathbb{R}^2$ ע"י הוקטור $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (במקרים יותר מסובכים כדאי להשתמש בגרם שמידט)

חלק ג:

(ז) נגדיר $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ח) מתקיים $A = U\Sigma V^t$. פירוק ה SVD שלה.

5. תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ממשית. יהא $A = U\Sigma V^t$ פירוק ה SVD שלה.

(א) מצא את פירוק ה SVD של A^t, AA^t , AA^t (כן, ניתן לעשות פירוק SVD גם למטריצות סימטריות- חשבו מה יוצא).

תשובה: $A^t = (U\Sigma V^t)^t = V\Sigma^t U^t \Rightarrow AA^t = (U\Sigma V^t)(V\Sigma^t U^t) = U\Sigma\Sigma^t U^t$ ובאופן דומה $A^tA = (V\Sigma^t U^t)(U\Sigma V^t) = V\Sigma^t\Sigma V^t$ (כל המעבר מתבססים על זה ש $VV^t = I_n, UU^t = I_m$, Σ בגודל של A) השלם:

(ב) המטריצה Vמורכבת מו"ע א"נ של $\underline{A^tA}$ (ניתן לראות את זה ישירות מכך ש $A^tA = V\Sigma^t\Sigma V^t$ ו $D = \Sigma^t\Sigma$, V אלכסונית D ו A^tA מאותו גודל של A^tA וראינו שבמטריצה D יהיו ע"ע וב Vהו"ע א"ג ולכן זה בעצם פירוק א"ג של

(ג) המטריצה Uמורכבת מו"ע א"נ של $\underline{AA^t}$ מאותו נימוק

(ד) המטריצה $\Sigma\Sigma^t$מורכבת מ$\underline{\text{ע"ע}}$ של $\underline{A^tA}$

(ה) המטריצה $\Sigma^t\Sigma$מורכבת מ$\underline{\text{ע"ע}}$ של $\underline{AA^t}$

(ו) נניח שהפירוק הוא $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

מצא בסיסים ל $N(A), C(A)$

פתרון: כיוון שב $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ יש רק מקדם אחד שונה מאפס אזי $rankA = 1$ (למי שלא ברור שיחזור על ההוכחה ויראה ש ב Σ נמצאים כל השורשים של הע"ע שאינם 0 וזה כמספר הוקטורים שמהווים בסיס למרחב השורות ולכן זה גם ה $rank$ של המטריצה). כתוצאה מכך (+ מדובר בפירוק SVD) נקבל ש:

i. $V^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ולכן $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

ולכן $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ בסיס ל $R(A)$

ii. $N(A)$ בסיס ל $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

iii. $C(A)$ בסיס ל $\{\begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix}\}$

iv. $N(A^t)$ בסיס ל $\begin{pmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{pmatrix}$

תזכורת:
הגדרה: תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. Aתקרא חיובית (חיובית לחלוטין) אם לכל $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $< Av, v >= v^tAv > 0$ (מתקיים $< Av, v >= v^tAv \geq 0$).
משפט: A חיובית $\Leftrightarrow$ כל ע"ע ≤ 0

6. האם כל מטריצה A סימטרית ממשית שכל מקדמיה חיובים (כלומר $(A)_{ij} \geq 0$) בהכרח מטריצה חיבוית?

פתרון: לא. למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ מקדמיה חיוביים אבל

$f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}| = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ כלומר יש ל A ע"ע $\lambda = -1$ שלילי ולכן A אינה חיובית.

7.

(א) האם כל מטריצה ממשית סימטרית $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטריצה מהצורה A^tA עבור A מטריצה כלשהיא

תשובה: לא. כי ראינו של A^tA יש ע"ע חיוביים תמיד ולכן מספק למצוא B ממשית סימטרית שיש לה ע"ע שלילי.

לדוגמא $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ מהשאלה הקודמת.

(ב) האם כל מטריצה ממשית סימטרית וחיובית $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטריצה מהצורה A^tA עבור A מטריצה כלשהיא

(הדרכה: חשוב על ליכסון א"ג)

כן. כיוון ש $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ חיובית ־ כל הע"ע שלה חיוביים (ליתר דיוק אי־שליליים) נתבונן בפירוק הא"נ שלה $B = PDP^t$ (Dמטריצת אלכסונית שבאלכסון הע"ע P מטריצה א"ג שעמודתיה הם ו"ע)

במקרה שלנו $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_i \geq 0$ לכל i. לכן ניתן להגדיר

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

מתקיים $\sqrt{D} \cdot \sqrt{D} = D$. נגדיר $A = P\sqrt{D}P^t$ ויתקיים

$$A^tA \quad = \quad (P\sqrt{D}P^t)^tP\sqrt{D}P^t = P\sqrt{D}^tP^tP\sqrt{D}P^t = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^t = PDP^t = B$$

בהצלחה!