המחלקה
למתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
אוניברסיטת בר־אילן

83–112 · 86–147 · סמסטר א' תשפ"ו

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

הגדרות, טענות ומשפטים

ד"ר ארז שיינר

טיוטה 1

איך לקרוא את הקובץ. הקובץ משמש את הקורסים 83–112 (חדו"א 1 להנדסה) ו־86–147 (מתמטיקה לפיזיקאים 1, אודיסאה). כל פריט ממוספר לפי הסעיף שבו הוא נמצא: הגדרה 2.1.4 היא הפריט הרביעי בסעיף 2.1. משפטים, טענות, למות ומסקנות עומדים על רקע תכלת עם קו ירוק בצד ימין; הגדרות, סימונים ושיטות עומדים על רקע בהיר, בלי קו. הערות ועקרונות עבודה מופיעים במסגרת, בלי מספר. כל פריט מנוסח במדויק; אחרי הניסוח המדויק מופיע לפעמים גם ניסוח מילולי (במילים:). בשוליים, ליד כל פריט: סרטון פותח סרטון בדיוק ברגע שבו הפריט נאמר, ו־הוכחה בסרטון פותח סרטון ברגע שבו מתחילה ההוכחה. הקישור הוא לסרטון הקצר של הלוח הירוק בשיש בזה שמתאים לחומר של הקורס, ואחרת להקלטת ההרצאה (סמסטר א' תשפ"ו; בביתת ההנדסה, ובביתת אודיסאה בשהפריט לא נאמר בהנדסה).

תוכן העניינים

1 מספרים וחסמים **4**

1.1 חסמים 4

2 גבול של סדרה **6**

2.1 הגדרת הגבול 6

2.2 שאיפה לאפס 8

2.3 חשבון גבולות 9

2.4 משפטי סנדוויץ' 9

3 המספר e וכללים לחישוב גבולות **10**

3.1 סדרות מונוטוניות והמספר e 10

3.2 כלל ה־e 11

3.3 חזקת אינסוף 11

3.4 כלל המנה 12

4 גבול של פונקציה ורציפות **13**

4.1 גבול של פונקציה 13

4.2 רציפות 14
4.3 הפונקציות הטריגונומטריות 15

5 גזירות **17**
5.1 הגדרת הנגזרת 17
5.2 הנגזרות של הפונקציות האלמנטריות 17
5.3 חוקי הגזירה 18
5.4 פונקציות הופכיות ונגזרתן 19

6 חקירה **21**
6.1 משפט ערך הביניים 21
6.2 משפטי ויירשטראס 21
6.3 משפט פרמה 22
6.4 משפט רול 22
6.5 משפט לגראנז' ותחומי עלייה וירידה 23
6.6 משפט קושי 24
6.7 כלל לופיטל 24

7 פולינום טיילור **26**
7.1 פולינום טיילור ושארית לגראנז' 26
7.2 שימושים של פולינום טיילור 27

8 האינטגרל הלא מסוים **28**
8.1 פונקציה קדומה 28
8.2 שיטות אינטגרציה 28
8.3 פונקציות רציונליות 30
8.4 אינטגרלים של שברים חלקיים 32

9 האינטגרל המסוים **34**
9.1 האינטגרל המסוים ותכונותיו 34
9.2 המשפט היסודי של החדו"א 34
9.3 סכומי רימן 35
9.4 אורך עקומה 36

10 אינטגרלים לא אמיתיים **37**
10.1 הגדרת אינטגרלים לא אמיתיים 37

10.2 מבחני השוואה לאינטגרלים חיוביים 38

1 מספרים וחסמים

קבוצות המספרים, חזקות ולוגריתמים נדונים בנספח נפרד.

1.1 חסמים

הגדרה 1.1.1 חסם מלעיל, חסם מלרע, קבוצה חסומה

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $M \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם מלעיל** של A אם לכל $a \in A$ מתקיים כי $a \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם מלרע** של A אם לכל $a \in A$ מתקיים כי $a \geq m$.
- A נקראת **חסומה מלעיל** אם יש לה חסם מלעיל.
- A נקראת **חסומה מלרע** אם יש לה חסם מלרע.
- A נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלעיל וחסומה מלרע.

הגדרה 1.1.2 מקסימום ומינימום

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $M \in A$ נקרא **המקסימום** של A או **האיבר הגדול ביותר** של A אם לכל $a \in A$ מתקיים כי $a \leq M$. במקרה זה מסמנים $M = \max A$.
- $m \in A$ נקרא **המינימום** של A או **האיבר הקטן ביותר** של A אם לכל $a \in A$ מתקיים כי $a \geq m$. במקרה זה מסמנים $m = \min A$.

הגדרה 1.1.3 חסם עליון וחסם תחתון

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

- אם יש איבר קטן ביותר בקבוצת חסמי המלעיל של A, הוא נקרא **החסם העליון** של A, או **הסופרמום** של A, ומסומן $\sup(A)$.
- אם יש איבר גדול ביותר בקבוצת חסמי המלרע של A, הוא נקרא **החסם התחתון** של A, או **האינפימום** של A, ומסומן $\inf(A)$.

טענה 1.1.4

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ויהיו $M, m \in \mathbb{R}$.

- אם $M = \max A$, אזי $M = \sup A$.
- אם $m = \min A$, אזי $m = \inf A$.

משפט 1.1.5 תנאי שקול לחסם עליון

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ויהי $M \in \mathbb{R}$.

הוכחה בסרטון

אזי M הוא החסם העליון של A אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

- M הוא חסם מלעיל של A;
- לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a > M - \varepsilon$.

$$M = \sup A \iff \Big(\forall a \in A:\ a \le M\Big) \wedge \Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A:\ a > M - \varepsilon\Big).$$

במילים: M הוא החסם העליון של A אם ורק אם M הוא חסם מלעיל של A, ולכל מספר הקטן מ־M יש ב־A איבר הגדול ממנו.

טענה 1.1.6 תכונת ארכימדס

סרטון

יהי $x \in \mathbb{R}$. אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists n \in \mathbb{N}:\quad n > x.$$

במילים: $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל.

משפט 1.1.7 שלמות הממשיים

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. אזי ל־A יש חסם עליון.

מסקנה 1.1.8

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע. אזי ל־A יש חסם תחתון.

הוכחה בסרטון

טענה 1.1.9 $\mathbb{Q}$ אינו שלם

סרטון

תהי $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. אזי A לא ריקה ויש לה חסם מלעיל רציונלי, אך לקבוצת חסמי המלעיל הרציונליים של A אין איבר קטן ביותר.

הוכחה בסרטון

במילים: ברציונליים יש קבוצה חסומה מלעיל שאין לה חסם עליון.

משפט 1.1.10 צפיפות הרציונליים והאי־רציונליים

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.

אזי קיימים $r_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ו־$r_2 \in \mathbb{Q}$ כך ש $a < r_1 < b$ ו־$a < r_2 < b$.

במילים: בין כל שני מספרים ממשיים שונים יש מספר אי־רציונלי ויש מספר רציונלי.

2 גבול של סדרה

2.1 הגדרת הגבול

הגדרה 2.1.1 סדרה

סרטון

סדרה ממשית (בקיצור **סדרה**) היא פונקציה $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, המתאימה לכל מספר טבעי n (מקום, אינדקס) מספר ממשי $a(n)$ (איבר).

- סימון: $a_n = a(n)$ הוא האיבר במקום ה־n, וגם את הסדרה עצמה מסמנים a_n.
- שימו לב: אלא אם נאמר במפורש אחרת, כל סדרה בקורס היא אינסופית.
- מותר שסדרה לא תהיה מוגדרת במספר סופי של מקומות.

הגדרה 2.1.2 סביבה

סרטון

- יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $\varepsilon > 0$. נגדיר **סביבה של** a **ברדיוס** ε, או **סביבת** ε **של** a, להיות הקטע

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}.$$

- נגדיר **סביבה של** ∞ בקטע מהצורה $(M, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > M\}$, כאשר $M > 0$.
- נגדיר **סביבה של** $-\infty$ בקטע מהצורה $(-\infty, -M) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -M\}$, כאשר $M > 0$.

טענה 2.1.3

סרטון

יהיו $a \in \mathbb{R}$ ו־$\varepsilon > 0$. אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ אם ורק אם $|x-a| < \varepsilon$.

הגדרה 2.1.4 גבול של סדרה

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית ויהי $L \in \mathbb{R}$. אומרים ש L הוא **הגבול** של a_n, ומסמנים $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (בקיצור $\lim a_n = L$) או $a_n \to L$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > K$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \in \mathbb{N} \;\; \forall n > K : \;\; |a_n - L| < \varepsilon.$$

במילים: לכל סביבה של L קיים מקום בסדרה שאחריו כל איברי הסדרה נמצאים בסביבה.

הגדרה 2.1.5 שאיפה ל־∞ ול־$-\infty$

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית.

- אומרים ש a_n **שואפת לאינסוף**, ומסמנים $a_n \to \infty$ או $\lim a_n = \infty$, אם לכל $M > 0$ קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > K$ מתקיים $a_n > M$:

$$\forall M > 0 \;\; \exists K \in \mathbb{N} \;\; \forall n > K : \;\; a_n > M.$$

- אומרים ש a_n **שואפת למינוס אינסוף**, ומסמנים $a_n \to -\infty$ או $\lim a_n = -\infty$, אם $-a_n \to \infty$.

הגדרה 2.1.6 מתכנסת ומתכנסת במובן הרחב

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית.

- a_n נקראת **מתכנסת** אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \to L$.
- a_n נקראת **מתכנסת במובן הרחב** אם קיים $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ כך ש $a_n \to L$.

משפט 2.1.7

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי a_n סדרה ממשית כך ש $a_n \to \infty$. אזי $\frac{1}{a_n} \to 0$.

טענה 2.1.8

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית כך ש $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to 0$. אזי $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$.

סימון 2.1.9 בתיב מקוצר

סרטון

בחישובי גבולות משתמשים בכתיב מקוצר, שאינו מדויק. בכתיב הזה הסמלים ∞, 0, 0^+ ו־0^- מייצגים סדרות ממשיות: ∞ מייצג סדרה השואפת ל־∞, ו־0 מייצג סדרה השואפת ל־0; 0^+ מייצג סדרה השואפת ל־0 שכל איבריה חיוביים, ו־0^- מייצג סדרה השואפת ל־0 שכל איבריה שליליים. שוויון בכתיב המקוצר הוא קיצור של טענה על כל הסדרות שהסמלים מייצגים, והסימן $\neq$ אומר שהטענה הזו אינה נכונה:

- $\frac{1}{\infty} = 0$ פירושו: לכל סדרה ממשית a_n כך ש $a_n \to \infty$ מתקיים $\frac{1}{a_n} \to 0$.
- $\frac{1}{0^+} = \infty$ פירושו: לכל סדרה ממשית a_n כך ש $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to 0$ מתקיים $\frac{1}{a_n} \to \infty$.
- $\frac{1}{0^-} = -\infty$ פירושו: לכל סדרה ממשית a_n כך ש $a_n < 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to 0$ מתקיים $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.
- $\frac{1}{0} \neq \infty$ פירושו: קיימת סדרה ממשית a_n כך ש $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to 0$, אך לא מתקיים $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

משפט 2.1.10 יחידות הגבול

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית ויהיו $L_1, L_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. אם $a_n \to L_1$ ובן $a_n \to L_2$, אזי $L_1 = L_2$.

הגדרה 2.1.11 קבוצת איברי הסדרה

תהי a_n סדרה ממשית. **קבוצת איברי הסדרה** היא הקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

הגדרה 2.1.12 סדרה חסומה

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית.

- a_n נקראת **חסומה מלעיל** אם קבוצת איברי הסדרה חסומה מלעיל.
- a_n נקראת **חסומה מלרע** אם קבוצת איברי הסדרה חסומה מלרע.
- a_n נקראת **חסומה** אם קבוצת איברי הסדרה חסומה.

טענה 2.1.13

תהי a_n סדרה ממשית. אזי a_n חסומה אם ורק אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| < M$.

סרטון

משפט 2.1.14

תהי a_n סדרה ממשית ויהי $L \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \to L$. אזי a_n חסומה.

סרטון

משפט 2.1.15

תהי a_n סדרה ממשית ויהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. אזי $a_n \to L$ אם ורק אם $a_{n+1} \to L$.

במילים: השמטת האיבר הראשון (המעבר מהסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ לסדרה $a_2, a_3, a_4, \ldots$) אינה משפיעה על הגבול, סופי או אינסופי.

סרטון

מסקנה 2.1.16

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות, ונניח שקיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n = b_n$ לכל $n > K$. אזי לכל $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ מתקיים $a_n \to L$ אם ורק אם $b_n \to L$.

במילים: שינוי מספר סופי של איברים בסדרה אינו משפיע על הגבול.

סרטון

טענה 2.1.17 מעבר לגבול באי־שוויון חלש

תהי a_n סדרה ממשית ויהי $a \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \geq a$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נניח ש a_n מתכנסת, כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \to L$. אזי $L \geq a$.

הערה: אי־שוויון חזק אינו עובר לגבול: מ־$a_n > a$ לכל n נובע רק $L \geq a$ (למשל $\frac{1}{n} > 0$ לכל n, אבל $\frac{1}{n} \to 0$).

סרטון
הוכחה בסרטון

2.2 שאיפה לאפס

טענה 2.2.1

תהי a_n סדרה ממשית ויהי $L \in \mathbb{R}$. אזי $a_n \to L$ אם ורק אם $|a_n - L| \to 0$.

סרטון
הוכחה בסרטון

מסקנה 2.2.2

תהי a_n סדרה ממשית. אזי $a_n \to 0$ אם ורק אם $|a_n| \to 0$.

סרטון
הוכחה בסרטון

טענה 2.2.3 סכום אפסות

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות כך ש $a_n \to 0$ ו־$b_n \to 0$. אזי $a_n + b_n \to 0$.

סרטון
הוכחה בסרטון

טענה 2.2.4 אפסה כפול חסומה

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות כך ש $a_n \to 0$ ו־b_n חסומה. אזי $a_n b_n \to 0$.

סרטון
הוכחה בסרטון

2.3 חשבון גבולות

משפט 2.3.1 אריתמטיקה של גבולות

סרטון
הוכחה בסרטון

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות, ויהיו $L_a, L_b \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \to L_a$ ו־$b_n \to L_b$. אזי:

(א) $a_n + b_n \to L_a + L_b$.

(ב) $a_n \cdot b_n \to L_a \cdot L_b$.

(ג) אם $L_b \neq 0$, אזי $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{L_a}{L_b}$.

טענה 2.3.2

סרטון
הוכחה בסרטון

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות כך ש a_n מתכנסת ו־b_n אינה מתכנסת. אזי $a_n + b_n$ אינה מתכנסת.

2.4 משפטי סנדוויץ'

משפט 2.4.1 הסנדוויץ'

סרטון

תהיינה a_n, b_n ו־c_n סדרות ממשיות כך ש $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ויהי $L \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \to L$ ו־$c_n \to L$. אזי $b_n \to L$.

משפט 2.4.2 חצי סנדוויץ'

סרטון

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות כך ש $a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to \infty$. אזי $b_n \to \infty$.

מסקנה 2.4.3 חצי סנדוויץ' על הרצפה

סרטון

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות כך ש $|a_n| \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$b_n \to 0$. אזי $a_n \to 0$.

3 המספר e ובכללים לחישוב גבולות

3.1 סדרות מונוטוניות והמספר e

הגדרה 3.1.1 סדרה מונוטונית

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית.

- a_n נקראת **מונוטונית עולה** אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq a_{n+1}$.
- a_n נקראת **מונוטונית יורדת** אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq a_{n+1}$.
- a_n נקראת **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

משפט 3.1.2 סדרות מונוטוניות

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי a_n סדרה ממשית מונוטונית.

(א) אם a_n חסומה, אזי קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \to L$.

(ב) אם a_n אינה חסומה, אזי $a_n \to \infty$ או $a_n \to -\infty$.

הגדרה 3.1.3 ממוצע חשבוני, הנדסי והרמוני

סרטון

יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $x_1, \ldots, x_n$ מספרים ממשיים חיוביים.

- **הממוצע החשבוני** (האלגברי) שלהם הוא $A = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
- **הממוצע ההנדסי** (הגיאומטרי) שלהם הוא $G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$.
- **הממוצע ההרמוני** שלהם הוא $H = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$.

משפט 3.1.4 אי־שוויון הממוצעים

סרטון

יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $x_1, \ldots, x_n$ מספרים ממשיים חיוביים. אזי

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

ובכל אחד משני אי־השוויונות מתקיים שוויון אם ורק אם $x_1 = \cdots = x_n$.

משפט 3.1.5 המספר e

סרטון

הוכחה בסרטון

לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- הסדרה a_n מונוטונית עולה, ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $2 \leq a_n < 4$. לכן היא מתכנסת לגבול סופי.
- הגדרה: **המספר** e הוא הגבול של a_n:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

מסקנה 3.1.6

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

סרטון
הוכחה בסרטון

מסקנה 3.1.7

המספר e הוא החסם העליון של קבוצת איברי הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

סרטון
הוכחה בסרטון

3.2 כלל ה־e

טענה 3.2.1

תהי a_n סדרה ממשית כך ש $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to 0$. אזי

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e.$$

סרטון
הוכחה בסרטון

טענה 3.2.2 חזקות של גבולות

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות, ויהיו $a > 0$ ו־L מספרים ממשיים. נניח ש $a_n \to a$ ו־$b_n \to L$. אזי $a_n^{b_n} \to a^L$.

סרטון

משפט 3.2.3 כלל ה־e

תהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות כך ש $a_n \to 1$, ונניח שהסדרה $b_n \cdot (a_n - 1)$ מתכנסת במובן הרחב. אזי

$$a_n^{b_n} \to e^{\lim b_n \cdot (a_n - 1)},$$

באשר $e^{\infty} = \infty$ ו־$e^{-\infty} = 0$.

במילים: הגבול הוא e בחזקת הגבול של המעריך כפול (הבסיס פחות 1).

סרטון
הוכחה בסרטון

3.3 חזקת אינסוף

משפט 3.3.1 האינדוקציה המתמטית

תהי $P(1), P(2), P(3), \ldots$ סדרת טענות כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

- הטענה $P(1)$ נכונה.
- לכל $n \in \mathbb{N}$, אם הטענה $P(n)$ נכונה אזי גם הטענה $P(n+1)$ נכונה.

אזי הטענה $P(n)$ נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.

$$P(1) \;\wedge\; \forall n \in \mathbb{N}\,\big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big) \;\Longrightarrow\; \forall n \in \mathbb{N}:\; P(n).$$

סרטון

טענה 3.3.2 אי־שוויון ברנולי

סרטון

יהי $x > -1$ מספר ממשי. אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

הוכחה בסרטון

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

משפט 3.3.3

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית כך ש $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ויהי $a \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \to a$. אזי:

הוכחה בסרטון

(א) אם $a > 1$ מתקיים $(a_n)^n \to \infty$.

(ב) אם $a < 1$ מתקיים $(a_n)^n \to 0$.

מסקנה 3.3.4

סרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$.

הוכחה בסרטון

(א) אם $a > 1$ אזי $a^n \to \infty$.

(ב) אם $0 < a < 1$ אזי $a^n \to 0$.

3.4 כלל המנה

משפט 3.4.1 כלל המנה

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית, ויהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L$. אזי:

הוכחה בסרטון

(א) אם $L > 1$ או $L = \infty$ מתקיים $|a_n| \to \infty$.

(ב) אם $0 \leq L < 1$ מתקיים $a_n \to 0$.

(ג) מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$.

4 גבול של פונקציה ורציפות

4.1 גבול של פונקציה

הגדרה 4.1.1 גבול של פונקציה לפי קושי

יהיו $x_0, L \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה. סרטון

- אומרים ש L הוא **הגבול** של f כאשר x שואף ל־x_0, ומסמנים $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 \neq |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- אומרים ש L הוא **הגבול מימין** של f ב־x_0, ומסמנים $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < x - x_0 < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- אומרים ש L הוא **הגבול משמאל** של f ב־x_0, ומסמנים $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < x_0 - x < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

במילים: לכל סביבה של L בציר y (ברדיוס ε) קיימת סביבה של x_0 בציר x (ברדיוס δ), כך שלכל $x \neq x_0$ בסביבה הזו, $f(x)$ נמצא בסביבה של L.

הגדרה 4.1.2 גבול של פונקציה לפי היינה

יהיו $x_0, L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ותהי f פונקציה. אומרים ש $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם לכל סדרה a_n סרטון המקיימת $a_n \neq x_0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to x_0$, מתקיים $f(a_n) \to L$:

$$\forall a_n : \ \left(\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \neq x_0\right) \ \wedge \ a_n \to x_0 \implies f(a_n) \to L.$$

הגדרה 4.1.3 גבולות חד־צדדיים לפי היינה

יהיו $x_0 \in \mathbb{R}$ ו־$L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ותהי f פונקציה. סרטון

- **גבול מימין:** אומרים ש $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ אם לכל סדרה a_n המקיימת $a_n > x_0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to x_0$, מתקיים $f(a_n) \to L$.
- **גבול משמאל:** אומרים ש $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ אם לכל סדרה a_n המקיימת $a_n < x_0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_n \to x_0$, מתקיים $f(a_n) \to L$.

משפט 4.1.4 שקילות הגדרות קושי והיינה

יהיו $x_0, L \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה. אזי: סרטון

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ לפי קושי אם ורק אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ לפי היינה.
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ לפי קושי אם ורק אם $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ לפי היינה.
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ לפי קושי אם ורק אם $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ לפי היינה.

מסקנה 4.1.5

סרטון

יהי $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, תהי f פונקציה, ותהיינה a_n ו־b_n סדרות ממשיות כך ש $a_n \to x_0$ ו־$b_n \to x_0$, וכן $a_n \neq x_0$ ו־$b_n \neq x_0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נניח שקיימים $L_1, L_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ כך ש $L_1 \neq L_2$, $f(a_n) \to L_1$ ו־$f(b_n) \to L_2$. אזי:

- לא קיים $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ כך ש $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.
- אם $x_0 \in \mathbb{R}$, ו־$a_n > x_0$ ו־$b_n > x_0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אזי לא קיים $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ כך ש $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.
- אם $x_0 \in \mathbb{R}$, ו־$a_n < x_0$ ו־$b_n < x_0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אזי לא קיים $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ כך ש $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

הערה: בשיעור נקראה הדרך הזו להראות שגבול אינו קיים "שיטת ההודים העיוורים".

מסקנה 4.1.6 העברת משפטי הסדרות לפונקציות

סרטון

יהי $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, תהיינה f, g, h פונקציות, ותהי U סביבה של x_0.

- **חשבון גבולות:** אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ו־$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, כאשר $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, אזי
  - (א) $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = L_1 + L_2$;
  - (ב) $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = L_1 \cdot L_2$;
  - (ג) אם בנוסף $L_2 \neq 0$, אזי $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.
- **סנדוויץ':** אם $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ לכל $x \in U$ השונה מ־x_0, וכן $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ו־$\lim_{x\to x_0} h(x) = L$ עבור $L \in \mathbb{R}$, אזי $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.
- **אפסה כפול חסומה:** אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ וקיים $M > 0$ כך ש $|g(x)| \leq M$ לכל $x \in U$ השונה מ־x_0, אזי $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 0$.

במילים: כמעט כל המשפטים על גבולות של סדרות נכונים גם לגבולות של פונקציות, בזכות הגדרת הגבול לפי היינה (למשל חשבון גבולות, סנדוויץ' ואפסה כפול חסומה), פרט לכלל המנה.

4.2 רציפות

הגדרה 4.2.1 רציפות בנקודה

סרטון

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה. אומרים ש f **רציפה בנקודה** x_0 אם

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

במילים: הפונקציה מגיעה בנקודה x_0 לערך שאליו היא שואפת: אין בה "ניתוק" ב־x_0. מההגדרה נובע ש f מוגדרת בסביבה של x_0.

הגדרה 4.2.2 רציפות בקטע סגור

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים ותהי f פונקציה. אומרים ש f **רציפה בקטע הסגור** $[a,b]$ אם:

- f רציפה בכל נקודה $x_0 \in (a,b)$;
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$;
- $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

הגדרה 4.2.3 מיון נקודות אי־רציפות

סרטון

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה.

- x_0 נקראת **נקודת אי־רציפות סליקה** של f אם הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים וסופי, ו־f אינה מוגדרת ב־x_0 או ש $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$.
- x_0 נקראת **נקודת אי־רציפות קפיצתית (מין ראשון)** של f אם הגבולות $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ו־$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ קיימים, סופיים ושונים זה מזה.
- x_0 נקראת **נקודת אי־רציפות עיקרית (מין שני)** של f אם לפחות אחד מהגבולות $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ אינו קיים או אינו סופי.

טענה 4.2.4

סרטון
הוכחה בסרטון

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה רציפה ב־x_0. אזי לכל סדרה x_n המקיימת $x_n \to x_0$ מתקיים $f(x_n) \to f(x_0)$, גם אם $x_n = x_0$ עבור חלק מה־n־ים.

במילים: אפשר להפעיל את הפונקציה על שני צידי הגבול.

משפט 4.2.5 גבול של הרכבה

סרטון
הוכחה בסרטון

יהיו $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ו־$y_0 \in \mathbb{R}$. תהי f פונקציה כך ש $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, ותהי g פונקציה רציפה ב־y_0. אזי

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

4.3 הפונקציות הטריגונומטריות

הגדרה 4.3.1 סינוס וקוסינוס לפי מעגל היחידה

סרטון

יהי $x \in \mathbb{R}$. נגדיר את $(\cos(x), \sin(x))$ להיות הנקודה שאליה נגיע אם נתחיל מהנקודה $(1,0)$ ונלך על מעגל היחידה (אוסף הנקודות במישור שמרחקן מראשית הצירים הוא 1):

(א) אם $x \geq 0$: מרחק x נגד כיוון השעון;

(ב) אם $x < 0$: מרחק $|x|$ עם כיוון השעון.

הגדרה 4.3.2 פונקציה זוגית ואי־זוגית

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה כך שלכל $x \in A$ מתקיים $-x \in A$, ותהי $f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה.

- f נקראת **זוגית** אם לכל $x \in A$ מתקיים $f(-x) = f(x)$.
- f נקראת **אי־זוגית** אם לכל $x \in A$ מתקיים $f(-x) = -f(x)$.

טענה 4.3.3

יהי $t \in \mathbb{R}$. אזי:

- **זוגיות:** $\sin(-t) = -\sin t$ ו־$\cos(-t) = \cos t$.
- **מחזוריות:** $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ ו־$\cos(t + 2\pi) = \cos t$.
- **זהות פיתגורס:** $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

סרטון

טענה 4.3.4 נוסחאות סכום זוויות וזווית כפולה

יהיו $a, b, x \in \mathbb{R}$. אזי:

- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$;
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$;
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$.

סרטון

הגדרה 4.3.5 טנגנס

לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $\cos(x) \neq 0$, **הטנגנס** של x הוא

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

סרטון

למה 4.3.6

לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x).$$

סרטון

הוכחה בסרטון

מסקנה 4.3.7

- $\lim_{x \to 0^+} \sin(x) = 0$.
- $\lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$.

סרטון

הוכחה בסרטון

משפט 4.3.8

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

סרטון

הוכחה בסרטון

5 גזירות

5.1 הגדרת הנגזרת

הגדרה 5.1.1 גזירות בנקודה ונגזרת

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה.

- אומרים ש f **גזירה** ב־x_0 אם הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ קיים וסופי.
- אם f גזירה ב־x_0, **הנגזרת** של f ב־x_0 היא הגבול הזה:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

ובאופן שקול, בהצבה $h = x - x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

במילים: f גזירה ב־x_0 אם גבול שיפועי המיתרים קיים וסופי, והנגזרת היא ערך הגבול.

סרטון

הגדרה 5.1.2 משיק

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה גזירה ב־x_0.

המשיק לגרף של f בנקודה x_0 הוא הישר שעובר בנקודה $(x_0, f(x_0))$ ושיפועו $f'(x_0)$.

סרטון

מסקנה 5.1.3

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה גזירה ב־x_0. אזי משוואת המשיק לגרף של f בנקודה x_0 היא

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

סרטון
הוכחה בסרטון

משפט 5.1.4 גזירות גוררת רציפות

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה גזירה ב־x_0. אזי f רציפה ב־x_0.

סרטון
הוכחה בסרטון

5.2 הנגזרות של הפונקציות האלמנטריות

למה 5.2.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

סרטון
הוכחה בסרטון

משפט 5.2.2 נגזרת הסינוס

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

סרטון
הוכחה בסרטון

טענה 5.2.3 נגזרת הקוסינוס

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

סרטון

למה 5.2.4

יהי $a > 0$ כך ש $a \neq 1$. אזי

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

סרטון

הוכחה בסרטון

משפט 5.2.5 נגזרת הלוגריתם

יהי $a > 0$ כך ש $a \neq 1$. אזי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log_a e}{x}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

סרטון

הוכחה בסרטון

למה 5.2.6

יהי $a > 0$. אזי

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

סרטון

הוכחה בסרטון

משפט 5.2.7 נגזרת האקספוננט

יהי $a > 0$ כך ש $a \neq 1$. אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (e^x)' = e^x.$$

סרטון

הוכחה בסרטון

5.3 חוקי הגזירה

משפט 5.3.1 כפל בקבוע, סכום ומכפלה

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, תהיינה f, g פונקציות גזירות ב־x_0, ויהי $c \in \mathbb{R}$. אזי:

- cf גזירה ב־x_0 ומתקיים $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
- $f + g$ גזירה ב־x_0 ומתקיים $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $f \cdot g$ גזירה ב־x_0 ומתקיים $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

סרטון

הוכחה בסרטון

משפט 5.3.2 כלל השרשרת (נגזרת הרכבה)

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, ותהי g פונקציה גזירה ב־x_0,

ותהי f פונקציה גזירה ב־$g(x_0)$.

אזי פונקציית ההרכבה $f \circ g$ גזירה ב־x_0 ומתקיים כי

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

סרטון

הוכחה בסרטון

שיטה 5.3.3 כלל האילן

תהיינה f ו־g פונקציות, ויהי x בתחום ההגדרה של שתיהן כך ש $f(x) > 0$. אזי

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

לכן, כדי לגזור חזקה של פונקציות f^g או לחשב את גבולה, כותבים אותה בצורה $e^{g \ln f}$; את הנגזרת מחשבים אז לפי כלל השרשרת.

סרטון

משפט 5.3.4 נגזרת חזקה עבור $x > 0$

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

סרטון

הוכחה בסרטון

מסקנה 5.3.5 נגזרת מנה

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, ותהיינה f, g פונקציות גזירות ב־x_0, כך ש $g(x_0) \neq 0$.

אזי $\frac{f}{g}$ גזירה ב־x_0 ומתקיים כי

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

סרטון

הוכחה בסרטון

5.4 פונקציות הופכיות ונגזרתן

הגדרה 5.4.1 פונקציה הפיכה ופונקציה הופכית

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$, ותהי $f : A \to B$ פונקציה.

- f **הפיכה** אם ורק אם היא חח"ע ועל.
- אם f הפיכה, **הפונקציה ההופכית** שלה היא הפונקציה $f^{-1} : B \to A$ המקיימת: לכל $x \in A$ ולכל $y \in B$, $f(x) = y$ אם ורק אם $x = f^{-1}(y)$.

סרטון

הגדרה 5.4.2 הפונקציות הטריגונומטריות ההופכיות

כל אחת מהפונקציות $f : A \to B$ הבאות היא חח"ע ועל, וההופכית שלה היא הפונקציה $f^{-1} : B \to A$ המקיימת: לכל $x \in A$ ולכל $y \in B$, $f(x) = y$ אם ורק אם $x = f^{-1}(y)$.

- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$; ההופכית היא $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$; ההופכית היא $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$; ההופכית היא $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

סרטון

משפט 5.4.3 רציפות הפונקציה ההופכית

יהיו $a < b$ ו־$c < d$ מספרים ממשיים, ותהי $f : [a, b] \to [c, d]$ פונקציה הפיכה ורציפה בקטע הסגור $[a, b]$. אזי $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ רציפה בקטע הסגור $[c, d]$.

סרטון

משפט 5.4.4 נגזרת הפונקציה ההופכית

סרטון

יהיו $a < b$ ו־$c < d$ מספרים ממשיים, ותהי $f : [a,b] \to [c,d]$ פונקציה הפיכה ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

יהי $x_0 \in (a,b)$, ונניח ש f גזירה ב־x_0 ו־$f'(x_0) \neq 0$.

אזי f^{-1} גזירה בנקודה $f(x_0)$ ומתקיים כי

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

או בנוסח אחר, עבור $y_0 = f(x_0)$:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

במילים: הנגזרת של ההופכית בנקודה y_0 היא אחד חלקי הנגזרת של f, לא בנקודה y_0 אלא בנקודה המתאימה $f^{-1}(y_0)$.

שיטה 5.4.5

סרטון

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$, תהי $f : A \to B$ פונקציה הפיכה, ויהי $x \in B$ כך ש f^{-1} גזירה ב־x ו־f גזירה ב־$f^{-1}(x)$.

כדי לחשב את $(f^{-1})'(x)$ מסמנים $y = f^{-1}(x)$, ולכן $x = f(y)$. גוזרים את שני האגפים לפי x, את אגף ימין לפי כלל השרשרת, ומקבלים

$$1 = f'(y) \cdot y'.$$

לכן $f'(y) \neq 0$, ומבודדים

$$(f^{-1})'(x) = y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

משפט 5.4.4 נותן תנאים שבהם f^{-1} גזירה.

טענה 5.4.6 נגזרת הטנגנס

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש $\cos(x) \neq 0$. אזי:

- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

טענה 5.4.7 נגזרת הארקטנגנס

סרטון

הוכחה בסרטון

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \frac{1}{\tan^2(\arctan x) + 1} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6 חקירה

6.1 משפט ערך הביניים

עקרונות החקירה

- בחקירת שוויון או אי־שוויון מעבירים אגף ובונים פונקציה.
- מוצאים את תחומי העלייה והירידה.
- מחשבים את קצוות תחומי העלייה והירידה, וכשאי אפשר להציב — מחשבים גבול.

סרטון

משפט 6.1.1 ערך הביניים

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

עוד ננית כי $f(a) \le 0$ ובן $f(b) \ge 0$.

אזי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) = 0$.

סרטון

הוכחה בסרטון

6.2 משפטי ויירשטראס

הגדרה 6.2.1 תת־סדרה

תהי a_n סדרה ממשית, ותהי k_n סדרה של מספרים טבעיים (סדרת מקומות) כך ש $k_n < k_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הסדרה a_{k_n}, שהאיבר ה־n שלה הוא a_{k_n}, נקראת **תת־סדרה** של a_n.

במילים: תת־סדרה היא הסדרה האינסופית הנותרת לאחר מחיקת איברים מהסדרה המקורית.

סרטון

טענה 6.2.2

תהי a_n סדרה ממשית. אזי יש ל־a_n תת־סדרה מונוטונית.

סרטון

הוכחה בסרטון

משפט 6.2.3 בולצאנו־ויירשטראס

תהי a_n סדרה ממשית חסומה. אזי יש ל־a_n תת־סדרה מתכנסת, כלומר קיימים תת־סדרה a_{k_n} של a_n ו־$L \in \mathbb{R}$ כך ש $a_{k_n} \to L$.

סרטון

הוכחה בסרטון

משפט 6.2.4 ויירשטראס הראשון (חסימות)

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

אזי f חסומה בקטע $[a,b]$, כלומר קיימים $m, M \in \mathbb{R}$ כך ש $m \le f(x) \le M$ לכל $x \in [a,b]$.

סרטון

הוכחה בסרטון

משפט 6.2.5 ויירשטראס השני (מקסימום ומינימום)

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

אזי f מקבלת מקסימום ומינימום בקטע $[a,b]$.

בלומר, קיימות נקודות $c, d \in [a,b]$ כך ש $f(d) \le f(x) \le f(c)$ לכל $x \in [a,b]$.

סרטון

הוכחה בסרטון

6.3 משפט פרמה

הגדרה 6.3.1 מקסימום מקומי, מינימום מקומי, קיצון מקומי

סרטון

תהי f פונקציה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$.

- x_0 נקראת **מקסימום מקומי** של f אם קיים $r > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ מתקיים $f(x) \leq f(x_0)$:

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) : \quad f(x) \leq f(x_0).$$

- x_0 נקראת **מינימום מקומי** של f אם קיים $r > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0)$.
- x_0 נקראת **נקודת קיצון מקומית** של f אם היא מקסימום מקומי או מינימום מקומי.

במילים: הסביבה חייבת להיות דו־צדדית: נקודת קצה של תחום ההגדרה אינה נקודת קיצון מקומית.

משפט 6.3.2 פרמה

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה גזירה ב־x_0.

אם x_0 נקודת קיצון מקומית של f, אזי $f'(x_0) = 0$.

ההפך אינו נכון: ייתכן ש $f'(x_0) = 0$ אך x_0 אינה נקודת קיצון מקומית של f.

6.4 משפט רול

משפט 6.4.1 רול

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a, b) כך ש $f(a) = f(b)$.

אזי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש $f'(c) = 0$.

טענה 6.4.2

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $n \in \mathbb{N}$, ויהי p פולינום מדרגה n, כלומר $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, כאשר $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ו־$a_n \neq 0$.

אזי ל־p יש לכל היותר n שורשים שונים (מספרים ממשיים x שבהם $p(x) = 0$).

6.5 משפט לגראנז' ותחומי עלייה וירידה

משפט 6.5.1 לגראנז'

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.

הוכחה בסרטון

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b).

אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

במילים: יש משיק שמקביל למיתר בין שתי הנקודות שבקצוות הקטע.

הגדרה 6.5.2 פונקציה עולה ויורדת בתחום

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה.

- f נקראת **עולה** בתחום A אם $f(x_1) \le f(x_2)$ לכל $x_1, x_2 \in A$ כך ש $x_1 < x_2$:

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2).$$

- f נקראת **יורדת** בתחום A אם $f(x_1) \ge f(x_2)$ לכל $x_1, x_2 \in A$ כך ש $x_1 < x_2$.

במילים: אי-השוויון חלש, ולכן גם פונקציה קבועה היא עולה.

טענה 6.5.3

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.

הוכחה בסרטון

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b).

אזי f עולה בתחום $[a,b]$ אם ורק אם לכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f'(x) \ge 0$.

מסקנה 6.5.4

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) כך ש $f'(x) \ge 0$ לכל $x \in (a,b)$.

אזי שלושת התנאים הבאים שקולים:

- $f(a) = f(b)$;
- $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a,b)$;
- f קבועה בקטע $[a,b]$.

6.6 משפט קושי

משפט 6.6.1 קושי (לגראנז' המובלל)

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.

הוכחה בסרטון

תהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b).

עוד נניח כי $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ עבורה

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

במילים: יש נקודה שבה מנת שיפועי המשיקים לגרפים של f ושל g שווה למנת שיפועי המיתרים שלהם בין קצוות הקטע.

6.7 כלל לופיטל

משפט 6.7.1 כלל לופיטל במקרה פרטי

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהיינה f, g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ כך ש $f(a) = g(a) = 0$.

הוכחה בסרטון

יהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ונניח ש $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

אזי

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

משפט 6.7.2 כלל לופיטל

סרטון

תהי $x \to x_0$ אחת מהשאיפות הבאות, ותהי U בהתאם לה (כאשר $a, K \in \mathbb{R}$ ו־$r > 0$):

- $x \to a$, ו־U הקבוצה $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$;
- $x \to a^+$, ו־U הקטע $(a, a+r)$;
- $x \to a^-$, ו־U הקטע $(a-r, a)$;
- $x \to \infty$, ו־U הקרן (K, ∞);
- $x \to -\infty$, ו־U הקרן $(-\infty, K)$.

תהיינה f, g פונקציות גזירות ב־U.

יהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ונניח ש $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

(א) $\frac{0}{0}$: אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ ו־$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, אזי $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(ב) $\frac{\infty}{\infty}$: אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ ו־$\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, אזי $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

במילים: הכלל פועל בכיוון אחד בלבד: אם למנת הנגזרות יש גבול, הוא שווה לגבול המקורי; כשלמנת הנגזרות אין גבול, הכלל אינו אומר דבר.

הגדרה 6.7.3 המקרים הבעייתיים

סרטון

תהי $x \to x_0$ אחת מהשאיפות שבכלל לופיטל ($x \to a$, $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ או $x \to -\infty$, כאשר $a \in \mathbb{R}$). **המקרים הבעייתיים** הם הצורות

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0,$$

שבהן כל סמל מייצג פונקציה השואפת אליו כאשר $x \to x_0$: 0 מייצג פונקציה השואפת ל־0, 1 מייצג פונקציה השואפת ל־1, ו־∞ מייצג פונקציה השואפת ל־∞. בצורות אלה הגבולות של הפונקציות המרכיבות אינם קובעים את גבול הביטוי: הוא תלוי בפונקציות עצמן, ואף ייתכן שאינו קיים.

במילים: אלה המקרים שבהם צריך להפעיל מניפולציות אלגבריות או משפטים על מנת לחשב את הגבול.

הטיפול במקרים הבעייתיים

- $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$: אפשר להשתמש בכלל לופיטל.
- $0 \cdot \infty$: כותבים את המכפלה כמנה, $f \cdot g = \frac{f}{\left(\frac{1}{g}\right)} = \frac{g}{\left(\frac{1}{f}\right)}$.
- $\infty - \infty$: מוציאים גורם משמעותי משותף, למשל $f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right)$, או עושים מכנה משותף.
- 1^∞: משתמשים בכלל ה־e.
- ∞^0 או 0^0: משתמשים בכלל האילן, $f^g = e^{g \ln f}$.
- "לא לגזור כמו חמור": מוטב לפשט את הביטוי ולפרק אותו לבעיות קטנות יותר.

משפט 6.7.4 סדרי הגודל

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $a, b > 0$ מספרים ממשיים. אזי

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$

בשני הגבולות האלה אפשר להשתמש בלי להוכיח אותם בכל פעם מחדש.

7 פולינום טיילור

7.1 פולינום טיילור ושארית לגראנז'

הגדרה 7.1.1 פולינום טיילור

סרטון

יהיו $n \in \mathbb{N}$ ו־$a \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה n פעמים ב־a. **פולינום טיילור** של f מסדר n סביב **נקודת ההשקה** a הוא הפולינום $p_n(f,a)$, המוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$ על ידי

$$p_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

בכתיב מקוצר, עם $f^{(0)} = f$:

$$p_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

הגדרה 7.1.2 השארית (השגיאה)

סרטון

יהיו $n \in \mathbb{N}$ ו־$a \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה n פעמים ב־a. לכל x בתחום ההגדרה של f, **השארית** או **השגיאה** בקירוב של $f(x)$ על ידי $p_n(f,a)(x)$ היא

$$R_n(f,a)(x) = f(x) - p_n(f,a)(x).$$

הגדרה 7.1.3 קירוב עד כדי שגיאה

סרטון

יהיו $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ ו־$h > 0$, תהי f פונקציה גזירה n פעמים ב־a, ויהי x בתחום ההגדרה של f. אומרים ש $p_n(f,a)(x)$ הוא **קירוב עד כדי שגיאה** של $f(x)$ אם h $|R_n(f,a)(x)| < h$.

משפט 7.1.4 שארית טיילור בצורת לגראנז'

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $n \in \mathbb{N}$ ו־$a \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבה U של a. יהי $x \in U$ כך ש $x \neq a$.

אזי קיימת נקודה c בקטע הפתוח בין a לבין x כך ש

$$R_n(f,a)(x) = f(x) - p_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

שיטה 7.1.5

סרטון

כדי לקרב מספר בעזרת פולינום טיילור:

- בוחרים פונקציה f ו**נקודה רצויה** x, כך ש $f(x)$ הוא המספר המבוקש.
- בוחרים **נקודה מצויה** a, היא נקודת ההשקה: נקודה שבה יודעים לחשב את f ואת נגזרותיה, כך שגם הקירוב $p_n(f,a)(x)$ הוא מספר שיודעים לחשב בלי מחשבון (בדרך כלל מספר רציונלי).
- הקירוב הוא $p_n(f,a)(x)$: מציבים את הנקודה הרצויה בפולינום טיילור במקום בפונקציה.
- את הסדר n קובעים אחרון, כך שהשגיאה בקירוב תהיה קטנה מספיק (לפי נתוני השאלה): בוחרים n וחוסמים את השגיאה, ואם החסם אינו קטן מספיק, מגדילים את n.

הערה

סרטון

בחסימת השגיאה בעזרת שארית לגראנז' הנקודה c אינה ידועה, ולכן חוסמים את הביטוי שבשארית לכל c בקטע הפתוח בין a לבין x. לעתים קרובות הביטוי מונוטוני ב־c, ואז החסם מתקבל בקצות הקטע; אבל זה לא תמיד כך, ואין להציב את c בקצות הקטע בלי לבדוק זאת.

בשהמונה והמכנה של הביטוי חיוביים, הקטנת המכנה או הגדלת המונה מגדילות את הביטוי. בשהמונה והמכנה גדלים יחד, משתמשים בכלי החקירה.

7.2 שימושים של פולינום טיילור

טענה 7.2.1

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה פעמיים בסביבה של a, כך ש f'' רציפה ב־a ו־$f''(a) > 0$. אזי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a-\delta, a+\delta)$ מתקיים

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

במילים: בסביבה של a הגרף של f אינו מתחת למשיק לגרף בנקודה a.

מסקנה 7.2.2 מבחן הנגזרת השנייה

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה פעמיים בסביבה של a, כך ש f'' רציפה ב־a ו־$f'(a) = 0$.

(א) אם $f''(a) > 0$, אזי a מינימום מקומי של f.

(ב) אם $f''(a) < 0$, אזי a מקסימום מקומי של f.

טענה 7.2.3

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה שלוש פעמים בסביבה U של a, כך ש f''' רציפה ב־a, $f''(a) = 0$ ו־$f'''(a) \neq 0$. לכל $x \in U$ נסמן $g(x) = f(x) - \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big)$.

(א) אם $f'''(a) > 0$, אזי קיים $\delta > 0$ כך ש $g(x) < 0$ לכל $x \in (a-\delta, a)$ ו־$g(x) > 0$ לכל $x \in (a, a+\delta)$.

(ב) אם $f'''(a) < 0$, אזי קיים $\delta > 0$ כך ש $g(x) > 0$ לכל $x \in (a-\delta, a)$ ו־$g(x) < 0$ לכל $x \in (a, a+\delta)$.

במילים: הגרף של f חוצה ב־a את המשיק לגרף בנקודה a: מצד אחד של a הוא מעל המשיק, ומהצד השני מתחתיו. זו נקודת פיתול.

8 האינטגרל הלא מסוים

אנחנו נחשב שטחים בעזרת פונקציות קדומות, ואת שאר הגדלים (אורך, נפח, עבודה ועוד) בעזרת שטחים.

8.1 פונקציה קדומה

הגדרה 8.1.1 פונקציה קדומה

סרטון

יהי I קטע פתוח (חסום או לא חסום), ותהיינה f ו־F פונקציות. F נקראת **פונקציה קדומה** (או **קדומה**) של f בקטע I אם F גזירה בכל נקודה של I ו־$F'(x) = f(x)$ לכל $x \in I$.

סימון 8.1.2 האינטגרל הלא מסוים

סרטון

יהי I קטע פתוח, ותהי f פונקציה שיש לה קדומה ב־I.

- קדומה של f ב־I נקראת גם **אינטגרל לא מסוים** של f, ומסמנים אותה $\int f(x)\,dx$, או בקיצור $\int f$. ה־dx הוא סימון בלבד: הוא אומר שהאינטגרל הוא לפי המשתנה x.
- אם F קדומה של f ב־I, כותבים $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, כאשר C מסמן קבוע ממשי כלשהו.
- שוויון בין ביטויים שבהם מופיעים אינטגרלים לא מסוימים הוא שוויון עד כדי קבוע: ההפרש בין שני האגפים הוא פונקציה קבועה ב־I.

טענה 8.1.3

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי I קטע פתוח, תהי f פונקציה, ותהי F קדומה של f ב־I. אזי קבוצת כל הקדומות של f ב־I היא $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$.

טענה 8.1.4

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי I קטע פתוח, תהיינה f ו־g פונקציות, ותהיינה F ו־G קדומות של f ושל g ב־I, בהתאמה. יהי $c \in \mathbb{R}$. אזי:

- $F + G$ קדומה של $f + g$ ב־I; כלומר $\int (f + g) = \int f + \int g$.
- cF קדומה של cf ב־I; כלומר $\int cf = c \int f$.

8.2 שיטות אינטגרציה

שיטת התפוד הלוהט

סרטון

לרוב הפונקציות אי אפשר להביע את הקדומה בעזרת פונקציות מוכרות, ואין שיטה שפותרת כל אינטגרל. השיטות שנלמד מחליפות אינטגרל אחד באינטגרל אחר, וכך הלאה, עד שמגיעים ל**אינטגרל מיידי**: אינטגרל של פונקציה שהיא נגזרת של פונקציה מוכרת.

משפט 8.2.1 אינטגרציה בחלקים

סרטון
הוכחה בסרטון

יהי I קטע פתוח, ותהיינה f ו־g פונקציות גזירות ב־I, כך של־$f'g$ יש קדומה H ב־I. אזי $fg - H$ קדומה של $f'g$ ב־I; כלומר

$$\int f'g = fg - \int g'f.$$

משפט 8.2.2 נוסחת ההצבה

סרטון
הוכחה בסרטון

יהיו I ו־J קטעים פתוחים, ותהי g פונקציה גזירה ב־I כך ש $g(x) \in J$ לכל $x \in I$. תהיינה f ו־F פונקציות כך ש F קדומה של f ב־J. אזי $F \circ g$ קדומה של $(f \circ g) \cdot g'$ ב־I; כלומר

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

שיטה 8.2.3 שיטת ההצבה

סרטון
הוכחה בסרטון

כדי לחשב אינטגרל מהצורה $\int f(g(x))g'(x)\,dx$:

- בוחרים הצבה $t = g(x)$, וגוזרים: $dt = g'(x)\,dx$.
- מחליפים את $g(x)$ ב־t ואת $g'(x)\,dx$ ב־dt, ומחשבים $\int f(t)\,dt = F(t) + C$.
- מציבים חזרה $t = g(x)$.

בקיצור:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\,dx \end{array} \right\} = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

השיטה מוצדקת על ידי נוסחת ההצבה.

שיטה 8.2.4

סרטון

יהי I קטע פתוח ותהי f פונקציה. כאשר רוצים להציב $t = g(x)$ באינטגרל $\int f(x)\,dx$ אבל הביטוי $g'(x)\,dx$ אינו מופיע בו, מבודדים את x כפונקציה של t:

- כותבים $x = h(t)$ ו־$dx = h'(t)\,dt$, כאשר J קטע פתוח ו־$h : J \to I$ פונקציה הפיכה וגזירה כך ש $h'(t) \neq 0$ לכל $t \in J$.
- מחשבים $\int f(h(t))h'(t)\,dt = G(t) + C$.
- מציבים חזרה $t = h^{-1}(x)$, ומקבלים

$$\int f(x)\,dx = G\big(h^{-1}(x)\big) + C.$$

8.3 פונקציות רציונליות

הגדרה 8.3.1 פולינום ודרגתו

סרטון

יהי $n \geq 0$ מספר שלם ויהיו $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- הפונקציה p, המוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ על ידי

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

נקראת **פולינום**, והמספרים $a_0, a_1, \ldots, a_n$ נקראים **המקדמים** שלו.

- אם $a_n \neq 0$, אומרים ש p פולינום **מדרגה** n. כלומר, הדרגה היא החזקה הגבוהה ביותר של x שהמקדם שלה שונה מאפס.
- הפולינום שכל מקדמיו אפס, כלומר $p(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, נקרא **פולינום האפס**, ודרגתו מוגדרת להיות $-\infty$.

הגדרה 8.3.2 פונקציה רציונלית

סרטון

יהיו p ו־q פולינומים, כך ש q אינו פולינום האפס. הפונקציה $\frac{p(x)}{q(x)}$, המוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $q(x) \neq 0$, נקראת **פונקציה רציונלית**.

שיטה 8.3.3

סרטון

תהי $\frac{p(x)}{q(x)}$ פונקציה רציונלית. מטפלים בה כך:

- אם דרגת המונה p גדולה מדרגת המכנה q או שווה לה, מבצעים חילוק פולינומים. מתקבלים פולינומים s ו־r, כך שדרגת r קטנה ממש מדרגת q ולכל x שבו $q(x) \neq 0$ מתקיים

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

- באשר דרגת המונה קטנה ממש מדרגת המכנה, מפרקים לשברים חלקיים.
- מטפלים בכל שבר חלקי בנפרד. בשאלה על אינטגרלים מחשבים את האינטגרל של כל שבר חלקי.

שיטה 8.3.4 חילוק פולינומים

סרטון

יהיו p ו־q פולינומים, כך ש q אינו פולינום האפס ודרגת p גדולה מדרגת q או שווה לה. כדי לחלק את p ב־q:

- מחלקים את המונום הגבוה של p במונום הגבוה של q, ומוסיפים את התוצאה למנה.
- כופלים את המונום שהתקבל ב־q.
- מחסרים את המכפלה מ־p.
- אם דרגת ההפרש קטנה ממש מדרגת q, ההפרש הוא השארית. אחרת חוזרים לשלב הראשון, עם ההפרש במקום p.

בסוף מתקבלים פולינומים s (המנה) ו־r (השארית), כך שדרגת r קטנה ממש מדרגת q ו־$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

טענה 8.3.5

סרטון

יהי p פולינום ויהי $a \in \mathbb{R}$. אזי $p(a) = 0$ אם ורק אם p מתחלק ב־$x - a$ ללא שארית, כלומר קיים פולינום s כך ש $p(x) = (x - a)s(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכחה בסרטון

הגדרה 8.3.6 פולינום פריק

סרטון

יהי p פולינום.

- p נקרא **פריק** אם קיימים פולינומים s ו־r, שאינם קבועים, כך ש $p(x) = s(x)r(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
- אם p אינו קבוע ואינו פריק, הוא נקרא **אי־פריק**.

טענה 8.3.7

סרטון

יהי p פולינום.

הוכחה בסרטון

(א) אם p מדרגה 1, אזי p אי־פריק.

(ב) אם p מדרגה 2, אזי p פריק אם ורק אם יש ל־p שורש, כלומר קיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש $p(x_0) = 0$.

(ג) אם p מדרגה 3 או יותר, אזי p פריק.

מסקנה 8.3.8

סרטון

יהי $n \in \mathbb{N}$, ויהי p פולינום מדרגה n, כלומר $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, כאשר $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ו־$a_n \neq 0$. אזי קיימים $k \in \mathbb{N}$ ופולינומים אי־פריקים $q_1, \ldots, q_k$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$p(x) = a_n \, q_1(x) q_2(x) \cdots q_k(x),$$

וכל אחד מהפולינומים $q_1, \ldots, q_k$ הוא מאחת הצורות הבאות:

- לינארי: $x - a$, כאשר $a \in \mathbb{R}$;
- ריבועי: $x^2 + bx + c$, כאשר $b, c \in \mathbb{R}$ ו־$b^2 < 4c$.

הגדרה 8.3.9 שבר חלקי

סרטון

- יהי $a \in \mathbb{R}$. **שבר חלקי** של הגורם האי־פריק הלינארי $x - a$ הוא פונקציה מהצורה $\frac{A}{(x-a)^k}$, כאשר $k \in \mathbb{N}$ ו־$A \in \mathbb{R}$.
- יהיו $b, c \in \mathbb{R}$ כך ש $b^2 < 4c$. **שבר חלקי** של הגורם האי־פריק הריבועי $x^2 + bx + c$ הוא פונקציה מהצורה $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$, כאשר $k \in \mathbb{N}$ ו־$A, B \in \mathbb{R}$.

משפט 8.3.10 פירוק לשברים חלקיים

סרטון

יהיו p ו־q פולינומים, כך ש q מדרגה 1 לפחות ודרגת p קטנה ממש מדרגת q. נכתוב את q כמכפלה של גורמים אי־פריקים, בצורה

$$q(x) = \alpha\, q_1(x)^{k_1} q_2(x)^{k_2} \cdots q_m(x)^{k_m},$$

באשר $\alpha \neq 0$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, ו־$q_1, \ldots, q_m$ פולינומים אי־פריקים שונים זה מזה, שכל אחד מהם מהצורה $x - a$ או מהצורה $x^2 + bx + c$ עם $b^2 < 4c$.

אזי קיימים מקדמים ממשיים יחידים כך שלכל x שבו $q(x) \neq 0$, $\frac{p(x)}{q(x)}$ שווה לסכום של השברים החלקיים הבאים, שבו כל גורם $q_i^{k_i}$ תורם k_i שברים חלקיים, עם מקדמים משלו:

- גורם $(x-a)^{k_i}$ תורם

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_{k_i}}{(x-a)^{k_i}};$$

- גורם $(x^2+bx+c)^{k_i}$ תורם

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_{k_i} x + B_{k_i}}{(x^2+bx+c)^{k_i}}.$$

שיטה 8.3.11

סרטון

כדי למצוא את המקדמים בפירוק של $\frac{p(x)}{q(x)}$ לשברים חלקיים:

- כותבים את הפירוק עם מקדמים לא ידועים, לפי הגורמים האי־פריקים של q.
- עושים מכנה משותף ומשווים מונים. מתקבל שוויון בין $p(x)$ לבין פולינום שמקדמיו תלויים במקדמים הלא ידועים, והוא מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$.
- משווים את המקדמים של כל חזקה של x בשני האגפים (מערכת משוואות לינאריות), או מציבים ערכים נוחים של x (למשל השורשים של המכנה), או משלבים את שתי הדרכים.

8.4 אינטגרלים של שברים חלקיים

טענה 8.4.1

סרטון

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה ב־x_0 כך ש $f(x_0) \neq 0$. אזי $\ln|f|$ גזירה ב־x_0 ומתקיים

$$(\ln|f|)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

במילים: אם f גזירה ושונה מאפס בכל נקודה של קטע פתוח, אזי $\ln|f|$ קדומה של $\frac{f'}{f}$ בקטע, כלומר $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$.

טענה 8.4.2

סרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$, ויהי I קטע פתוח שאינו מכיל את a. אזי ב־I:

- $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$;
- לכל מספר טבעי $n > 1$ מתקיים $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$.

שיטה 8.4.3

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $A,B,b,c\in\mathbb{R}$. בדי לחשב את $\int\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$:

- בודקים שהמכנה אי־פריק, כלומר $b^2<4c$, ואז $x^2+bx+c>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. אחרת מפרקים לשברים חלקיים.
- משלימים את המונה לנגזרת המכנה, $(x^2+bx+c)'=2x+b$:

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}=\frac{A}{2}\cdot\frac{2x+b}{x^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2}\right)\frac{1}{x^2+bx+c}.$$

- לבן

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+bx+c\right)+\left(B-\frac{Ab}{2}\right)\int\frac{1}{x^2+bx+c}\,dx,$$

ונשאר לחשב את האינטגרל האחרון.

טענה 8.4.4

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $b,c\in\mathbb{R}$ כך ש $b^2<4c$. אזי:

- (השלמה לריבוע) לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$, ו־$c-\frac{b^2}{4}>0$.
- ב־$\mathbb{R}$ מתקיים

$$\int\frac{1}{x^2+bx+c}\,dx=\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right)+C.$$

9 האינטגרל המסוים

9.1 האינטגרל המסוים ותכונותיו

הערה

סרטון

בקורס הזה לא מגדירים במדויק מהו שטח, אלא מניחים שיש מושג של שטח עם סימן, ושלפונקציות מסוימות, שנקראות **אינטגרביליות** (בעלות שטח), יש שטח כזה. יהיו $a < b$ מספרים ממשיים.

- תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. **האינטגרל המסוים** של f בקטע $[a,b]$, שמסומן $\int_a^b f(x)\,dx$ (או בקיצור $\int_a^b f$), הוא השטח המסומן בין הגרף של f לציר ה־x בקטע: השטח שמעל הציר נמדד באופן חיובי, והשטח שמתחת לציר נמדד באופן שלילי.
- מניחים שכל פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אינטגרבילית בו, ושפונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית גם בכל קטע סגור המוכל בו.

הגדרה 9.1.1

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים ותהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. נגדיר

$$\int_b^a f = -\int_a^b f,$$

ולכל $c \in [a,b]$ נגדיר $\int_c^c f = 0$.

טענה 9.1.2

סרטון

יהיו $p < q$ מספרים ממשיים ותהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[p,q]$. אזי לכל $a,b,c \in [p,q]$ מתקיים

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

למה 9.1.3

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ויהיו $m, M \in \mathbb{R}$ כך ש $m \le f(x) \le M$ לכל $x \in [a,b]$. אזי

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a).$$

9.2 המשפט היסודי של החדו"א

הגדרה 9.2.1 פונקציית השטח

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים ותהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. **פונקציית השטח** של f היא הפונקציה $S_{a,f}$, המוגדרת לכל $x \in [a,b]$ על ידי

$$S_{a,f}(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

משפט 9.2.2 המשפט היסודי של החדו"א

סרטון
הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ויהי $x_0 \in (a,b)$ כך ש f רציפה ב־x_0. אזי $S_{a,f}$ גזירה ב־x_0 ומתקיים

$$(S_{a,f})'(x_0) = f(x_0).$$

במילים: פונקציית השטח היא פונקציה קדומה של הפונקציה המקורית, כאשר זו רציפה.

מסקנה 9.2.3

סרטון
הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים ותהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי ל־f יש פונקציה קדומה בקטע (a,b): פונקציית השטח $S_{a,f}$ היא פונקציה קדומה של f בקטע (a,b).

מסקנה 9.2.4 נוסחת ניוטון–לייבניץ

סרטון
הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, ותהי F פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ שהיא פונקציה קדומה של f בקטע (a,b). אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

9.3 סכומי רימן

הגדרה 9.3.1 סכום רימן

סרטון

יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$. נחלק את הקטע $[0,1]$ ל־n קטעים שווים: $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, עבור $k = 1, \ldots, n$.

- **סכום רימן** של f (עם הקצוות הימניים) הוא הסכום

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- באופן כללי יותר, לכל בחירה של נקודות $c_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, עבור $k = 1, \ldots, n$, גם הסכום $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(c_k)$ נקרא **סכום רימן** של f.

במילים: המחובר ה־k הוא השטח (עם סימן) של מלבן שבסיסו הקטע ה־k וגובהו ערך הפונקציה בנקודה שנבחרה בקטע, וסכום רימן הוא סכום שטחי המלבנים.

משפט 9.3.2

סרטון

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$. אזי:

- מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

- אם לכל $n \in \mathbb{N}$ המספר R_n הוא סכום רימן של f בחלוקה של $[0,1]$ ל־n קטעים שווים (עם בחירה כלשהי של נקודות), אזי $R_n \to \int_0^1 f(x)\,dx$.

מסקנה 9.3.3

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים ותהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. נגדיר $g(x) = (b-a)\,f\big(a+(b-a)x\big)$ לכל $x \in [0,1]$. אזי g רציפה בקטע הסגור $[0,1]$, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\Big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\, g\Big(\frac{k}{n}\Big),$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\Big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\Big) = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

במילים: "כל קטע הוא $[0,1]$": סכום שטחי המלבנים בחלוקה של $[a,b]$ ל־n קטעים שווים הוא סכום רימן של הפונקציה g בקטע $[0,1]$.

9.4 אורך עקומה

טענה 9.4.1 אורך עקומה

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f פונקציה גזירה בקטע פתוח המכיל את $[a,b]$, כך ש f' רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי אורך הגרף של f בקטע $[a,b]$ הוא

$$\int_a^b \sqrt{\big(f'(x)\big)^2 + 1}\,dx.$$

במילים: אורך הגרף הוא הגבול של סכומי אורכי המיתרים בין נקודות הגרף שמעל נקודות החלוקה של $[a,b]$ לקטעים שווים, כאשר מספר הקטעים שואף לאינסוף (בדומה לכך שהשטח הוא גבול של סכומי שטחי מלבנים).

10 אינטגרלים לא אמיתיים

10.1 הגדרת אינטגרלים לא אמיתיים

הגדרה 10.1.1 אינטגרל לא אמיתי

סרטון

- **אינטגרל בגובה אינסופי.** יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f פונקציה שאינה חסומה בקטע $[a, b[$.

  (א) אם f אינטגרבילית בקטע $[t, b]$ לכל $t \in (a, b)$, נגדיר

  $$\int_a^b f = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f.$$

  (ב) אם f אינטגרבילית בקטע $[a, t]$ לכל $t \in (a, b)$, נגדיר

  $$\int_a^b f = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f.$$

- **אינטגרל ברוחב אינסופי.**

  (א) יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, t]$ לכל $t > a$. נגדיר

  $$\int_a^\infty f = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f.$$

  (ב) יהי $b \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[t, b]$ לכל $t < b$. נגדיר

  $$\int_{-\infty}^b f = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f.$$

בכל אחד מהמקרים, האינטגרל נקרא **אינטגרל לא אמיתי**, והקצה שבו לוקחים את הגבול (a, b, ∞ או $-\infty$, בהתאמה) נקרא **הנקודה הבעייתית** שלו. האינטגרל שווה לגבול כאשר הגבול קיים, סופי או אינסופי. אם הגבול קיים וסופי, אומרים שהאינטגרל **מתכנס**, ואחרת אומרים שהוא **מתבדר**. אינטגרל מסוים של פונקציה אינטגרבילית בקטע סגור נחשב גם הוא מתכנס.

הגדרה 10.1.2

סרטון

יהיו $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ו־$b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש $a < b$, ותהי f פונקציה. נניח שקיימות נקודות $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ כך שלכל $i = 1, \ldots, m$ האינטגרל $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ הוא אינטגרל לא אמיתי עם נקודה בעייתית אחת, או אינטגרל מסוים של פונקציה אינטגרבילית בקטע $[x_{i-1}, x_i]$. אומרים שהאינטגרל $\int_a^b f$ **מתכנס** אם כל אחד מהאינטגרלים $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ מתכנס, ואז מגדירים

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f;$$

אחרת אומרים שהאינטגרל $\int_a^b f$ **מתבדר**.

במילים: אינטגרל עם כמה נקודות בעייתיות מפרקים לאינטגרלים עם נקודה בעייתית אחת, והוא מתכנס רק אם כל אחד מהם מתכנס בנפרד. בפרט, כאשר $a = -\infty$ ו־$b = \infty$, לא מספיק שהגבול $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f$ קיים וסופי.

הערה

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, תהי g פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a, b]$, ותהי f פונקציה (שאולי אינה מוגדרת ב־a) כך ש $f(x) = g(x)$ לכל $x \in (a, b]$. למשל, ל־f יש ב־a אי־רציפות סליקה, ו־g מתקבלת מ־f כשמתקנים את ערכה ב־a להיות הגבול. הפונקציה g חסומה בקטע $[a, b]$, ולכן גם f חסומה בו, והאינטגרל $\int_a^b f$ אינו אינטגרל לא אמיתי. נקודה אחת אינה משפיעה על השטח, ולכן $\int_a^b f = \int_a^b g$. אותו הדבר נכון כאשר $f(x) = g(x)$ לכל $x \in [a, b)$, ו־f אולי אינה מוגדרת ב־b.

טענה 10.1.3

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$. אזי:

(א) האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$ מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

(ב) האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$ מתכנס אם ורק אם $a < 1$.

10.2 מבחני השוואה לאינטגרלים חיוביים

טענה 10.2.1

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה עולה בקרן $[a, \infty)$.

(א) אם f חסומה מלעיל בקרן $[a, \infty)$, כלומר קיים $M \in \mathbb{R}$ כך ש $f(x) \le M$ לכל $x \ge a$, אזי הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים וסופי.

(ב) אם f אינה חסומה מלעיל בקרן $[a, \infty)$, אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

משפט 10.2.2 מבחן ההשוואה הראשון

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהיינה f, g פונקציות רציפות בקרן $[a, \infty)$ כך ש $0 \le f(x) \le g(x)$ לכל $x \ge a$. אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס.

מסקנה 10.2.3

יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהיינה f, g פונקציות רציפות בקרן $[a, \infty)$ כך ש $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \geq a$.
אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אזי $\int_a^\infty g$ מתבדר.

סרטון
הוכחה בסרטון

משפט 10.2.4 מבחן ההשוואה הגבולי

יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהיינה f, g פונקציות רציפות בקרן $[a, \infty)$ כך ש $f(x) \geq 0$ ו־$g(x) > 0$ לכל $x \geq a$. נניח שקיים $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

(א) אם $0 < c < \infty$, אזי האינטגרלים $\int_a^\infty f$ ו־$\int_a^\infty g$ **חברים**, כלומר שניהם מתכנסים או שניהם מתבדרים.

(ב) אם $c = 0$ ו־$\int_a^\infty g$ מתכנס, אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס.

(ג) אם $c = \infty$ ו־$\int_a^\infty f$ מתכנס, אזי $\int_a^\infty g$ מתכנס.

סרטון
הוכחה בסרטון

הערה

מבחן ההשוואה הראשון, המסקנה שאחריו ומבחן ההשוואה הגבולי נבונים, עם אותן הוכחות, גם כאשר הנקודה הבעייתית של שני האינטגרלים היא קצה סופי של הקטע או $-\infty$, ובלבד ששני האינטגרלים הם באותו הקטע ועם אותה הנקודה הבעייתית. התנאים על f ו־g נדרשים אז בקטע הזה, בלי הנקודה הבעייתית, ואת הגבול במבחן ההשוואה הגבולי לוקחים בנקודה הבעייתית, ולא תמיד באינסוף. למשל, כאשר הנקודה הבעייתית היא הקצה השמאלי a של הקטע $[a, b]$, מחשבים את הגבול $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

סרטון