אינטגרציה נומרית

Newton-Cotes And Gauss Quadrature

אוניברסיטת בר-אולן , תשע"ו. מאת : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'

אינטגרציה נומרית

רוצים לחשב:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

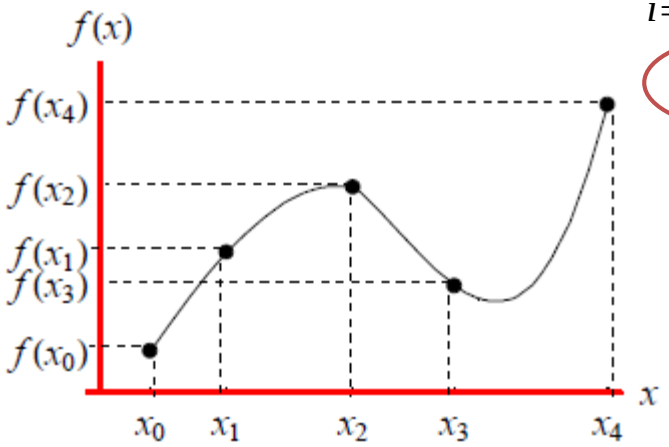
אינטגרנד

כל השיטות שנלמד תהינה מהצורה:

$$I^{Num} = \sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i)$$

משקלים

נקודות דגימה



נלמד 2 סוגי אינטגרציה נומרית:

1. נקודות דגימה במרחקים שווים ... x_0, x_0+h, x_0+2h,
2. נקודות דגימה במרחקים שונים

נתחיל מהסוג הראשון: **מרחקים שווים**

⇓

Newton-Cotes Quadrature Formulas

יש 2 קבוצות של שיטות ניוטון-קוטס:

א) נוסחאות סגורות – כאשר גבולות האינטגרל הם גם נקודות דגימה

ב) נוסחאות פתוחות – גבולות האינטגרל לא נכללים בין נקודות דגימה

נוסחאות ניוטון-קוטס סגורות

מחשבים את האינטגרל לפי: $I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n} H_i f(x_i)+E_n$

כאשר , $x_0=a$, $x_i=x_0+ih$, ..., $x_n=b$.

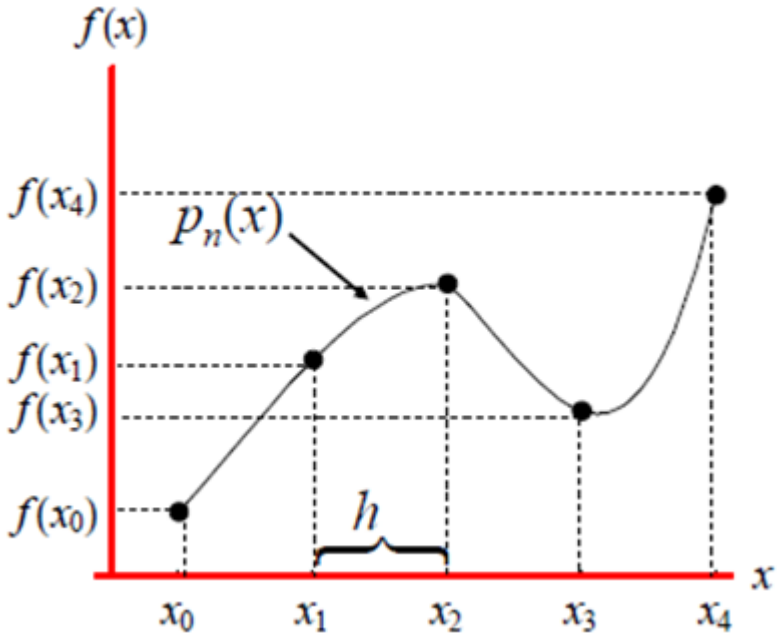
כל $n+1$ נקודות ממוקמות במרחקים שווים

$$h=\frac{(b-a)}{n}$$

הדרך לפיתוח נוסחאות נ"ק היא לבנות פולינום אינטרפולציה $p_n(x)$ לערכי $(x_i\, f(x_i))$ $(i=0, \ldots, n)$

ולחשב אינטגרל מאותו הפולינום:

$$I_n=\int_a^b p_n(x)dx$$



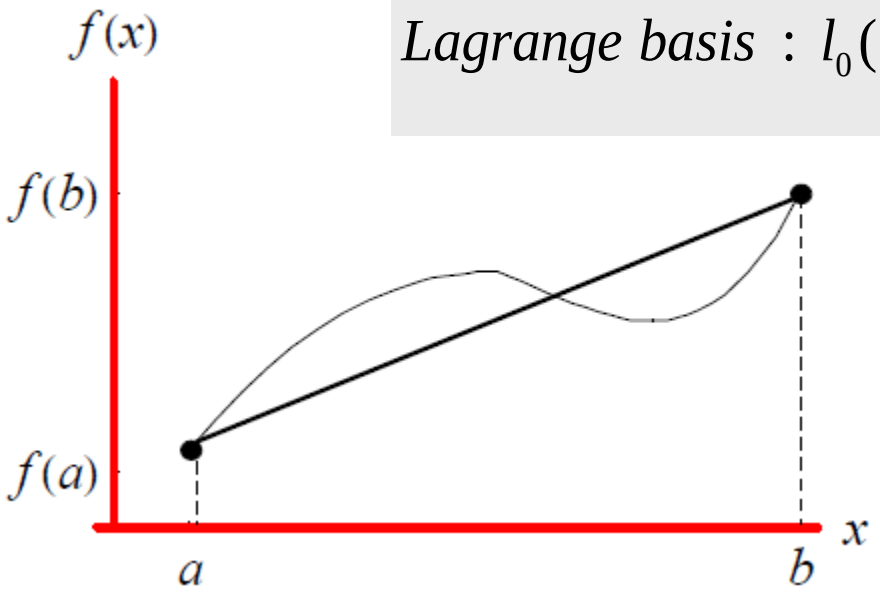
הפולינום אפשר לבנות בצורה של לגרנג' $p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$

ומכן רואים כי $H_i=\int_a^b l_i(x)\,dx$

המשקלים H_i נקראים "מספרי קוטס"

שיטת הטרפז

נתחיל מהפולינום הפשוט ביותר עם $n=1$, $p_1(x)$, העובר בין 2 נקודות $a,\ b$



נקבל

$$Lagrange\ basis\ :\ l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$$

$$p_1(x)=\frac{x-b}{-h}f(a)+\frac{x-a}{h}f(b)$$

כאשר $h=b-a$

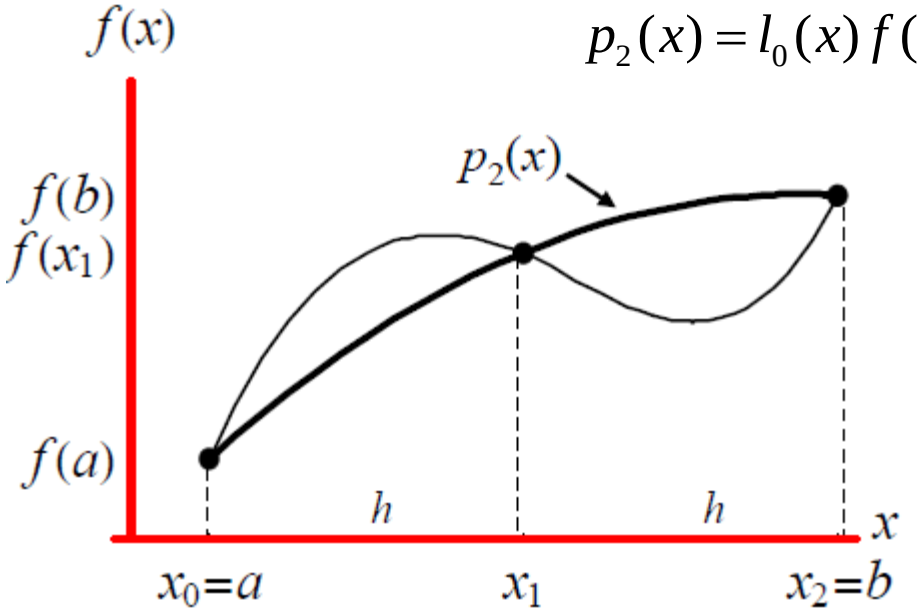
נבצע אינטגרציה:

$$I_T=\int_a^b\left[\frac{b-x}{h}f(a)+\frac{x-a}{h}f(b)\right]dx=\frac{1}{h}\left[\left(bx-\frac{x^2}{2}\right)f(a)+\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)f(b)\right]\Bigg|_a^b$$

$$=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$

שיטת סימפסון

נגדיל את מספר הנקודות ל-3 , ($n=2$) ונבנה פולינום אינטרפולציה $p_2(x)$



נקבל: $$p_2(x)=l_0(x)f(a)+l_1(x)f(a+h)+l_2(x)f(a+2h)$$

כאשר $$h=b-a$$

Lagrange basis

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

נציב ל $p_2(x)$:

$$p_2(x)=\frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{(-h)(-2h)}f(a)+\frac{(x-a)(x-a-2h)}{h(-h)}f(a+h)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2h\cdot h}f(a+2h)$$

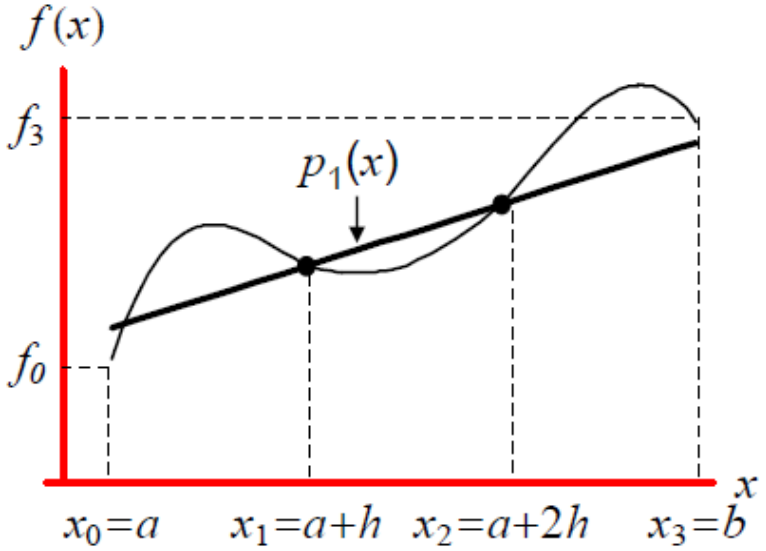
$$p_2(x)=\frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{(-h)(-2h)}f(a)+\frac{(x-a)(x-a-2h)}{h(-h)}f(a+h)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2h\cdot h}f(a+2h)$$

נבצע אינטגרציה של הפולינומים l_i ונקבל את המשקלים:

$$H_0=\int_0^{2h}\frac{(x-h)(x-2h)}{2h^2}dx=\frac{h}{3},\quad H_1=\int_0^{2h}\frac{x(x-2h)}{-h^2}dx=\frac{4h}{3},\quad H_2=\int_0^{2h}\frac{x(x-h)}{2h^2}dx=\frac{h}{3}$$

$$I_2=\int_a^b p_2(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(a+h)+f(b)\right]=\frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+f_2\right]\quad ,f_i=f(x_i)\text{ כאשר}$$

נוסחאות ניוטון-קוטס פתוחות

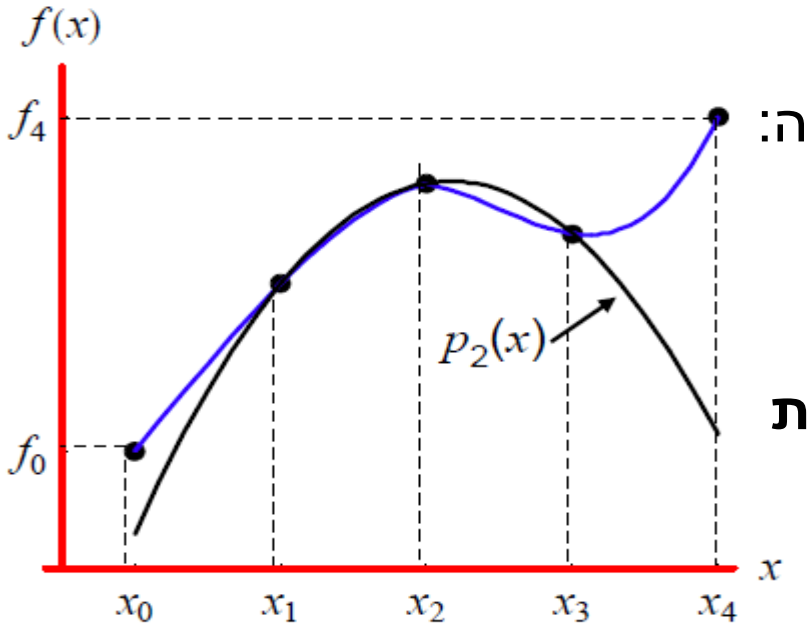


בסוג הזה של הנוסחאות נקודות הקצה $(a,\ b)$ לא נכללות בין נקודות הדגימה

נפתח את השיטה ל 2 נקודות **פנימיות** (n=1):

$$p_1(x)=\frac{x-x_2}{-h}f(x_1)+\frac{x-x_1}{h}f(x_2)$$

כאשר $h=\frac{b-a}{3}$



נציב את הפולינום לאינטגרל ונבצע אינטגראציה:

$$I_T^{open}=\int_a^{a+3h}p_1(x)dx=\frac{3h}{2}(f_1+f_2)$$

באותה הדרך נפתח נוסחה ל 3 נקודות **פנימיות** (n=2):

$$I_S^{open}=\frac{h}{3}(8f_1-4f_2+8f_3)$$

שגיאת האינטגרציה (שגיאת הקיטוע)

שגיאת האינטגרציה לפי נוסחאות ניוטון-קוטס נובעת משגיאת האינטרפולאציה של הפונקציה ע"י פולינום:

$$E_n = I - I_n = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]\,dx = \int_a^b e_n(x)\,dx$$

כאשר נזכור כי שגיאת האינטרפולציה היא

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}_{\Pi_{n+1}(x)}$$

דרגת הדיוק והתכנסות שיטת נ"ק

הגדרות: דרגת הפולינום n הגדולה ביותר וכזאת שהשיטה היא מדויקת* עבור כל פולינום מדרגה $n \geq$ נקראת **דרגת הדיוק** של שיטת האינטגראציה.

סדר השגיאה זה החזקה של h בנוסחת השגיאה.

** שיטה מדויקת – הכוונה היא ששגיאת האינטגרציה שווה ל- 0*

משפטי עזר

משפט ערך הביניים:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \quad , \quad a<c<b$$

הכללה:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx \quad , \quad a<c<b$$

בהנחה שהפונקציה $g(x)$ **<u>לא משנה סימן בקטע</u>** $[a,b]$.

עבור $g(x)\equiv 1$ נקבל את משפט ערך הביניים.

טענה : חסם לשגיאה של נוסחת הטרפז

$$|E_T| \le \frac{h^3}{12} f''(\eta)$$

הוכחה :

כיוון שנוסחת הטרפז הלוקאלית מבוססת על **<u>אינטרפולציה לינארית</u>** בקטע $[x_0, x_1] = [a, a+h]$, נוכל להשתמש **<u>בנוסחת השגיאה של האינטרפולציה הליניארית:</u>**

$$f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\beta)}{2!}(x-a)(x-a-h), \quad a < \beta < a+h$$

ולרשום:

$$E_T = \int_a^{a+h} f(x)dx - \int_a^{a+h} L_1(x)dx = \int_a^{a+h} [f(x) - L_1(x)]dx =$$

$$= \int_a^{a+h} \frac{f''(\beta)}{2!} \underbrace{(x-a)(x-a-h)}_{g(x)\le 0, \quad \forall x \in [a, a+h]} dx = \quad , a < \beta < a+h$$

לפי שגיאת האינטרפולציה

המשך הוכחה

נמשיך...

$$a<\eta<a+h \text{ ,}$$

$$= \frac{f''(\eta)}{2!}\cdot\int_{a}^{a+h}(x-a)(x-a-h)dx =$$

לפי מ.ערך הביניים המוכלל

$$= \frac{f''(\eta)}{2!}\cdot\int_{0}^{h}\underbrace{z(z-h)}_{z^2-hz}dz = \frac{f''(\eta)}{2!}\underbrace{\left[\frac{z^3}{3}-h\frac{z^2}{2}\Big|_0^h\right]}_{=-\frac{1}{6}h^3}$$

$\Downarrow$ $z=x-a$ הצבה

$$= -\frac{1}{12}f''(\eta)\cdot h^3$$

מסקנה : סדר השגיאה של שיטת הטרפז הוא 3

שגיאת שיטת טרפז

נציב בנוסחת השגיאה $f(x)=x^2$ אזי מתקיים $f''(x)=2=2!$

ומנוסחת השגיאה

$$E_T\left[x^2;a,a+h\right]=\int_a^{a+h}(x-a)(x-a-h)dx \underset{z=x-a-\frac{h}{2}}{=} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(z+\frac{h}{2}\right)\left(z-\frac{h}{2}\right)dz\neq 0$$

פונק' זוגית
בקטע סימטרי

עתה, נציב בנוסחת השגיאה $f(x)=x$. אזי מתקיים $f''(x)=0$

ומנוסחת השגיאה נקבל לכן כי $E_T\left[x;a,a+h\right]=0$

מסקנה חשובה:

נוסחת טרפז מדויקת עבור כל פולינום ממעלה $1\geq$

שגיאת סימפסון

טענה : חסם לשגיאה של נוסחת סימפסון

$$\left|E_S\right| \le \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$$

נזכור כי נוסחת סימפסון מבוססת על אינטרפולציה ריבועית הבנויה על הנקודות $a, a+h, a+2h$ בקטע $[a, a+2h]$

נוכל, אם כן, להשתמש **<u>בנוסחת השגיאה של אינטרפולציה ריבועית:</u>**

$$f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)(x-a-h)(x-a-2h), \quad a < \xi < a+2h$$

$$(1)\ E_S = \int_a^{a+2h} [f(x) - L_2(x)]dx = \int_a^{a+2h} \frac{f'''(\xi)}{3!} \underbrace{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}_{g(x)} dx$$

$$a < \xi < a+2h$$

שגיאת סימפסון, המשך

- נעיר כי הפונקציה $g(x)=(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)$ **<u>לא</u>**

<u>שומרת סימן</u> בקטע $[a,a+2h]$ לכן **<u>לא ניתן להשתמש בהכללה של</u>**

<u>משפט ערך הביניים</u> , כפי שעשינו עבור נוסחת הטרפז ולקבל בדרך זו

ביטוי יותר סגור עבור השגיאה של נוסחת סימפסון.

- אפשר להוכיח את נוסחת שגיאת אינטגרציה של סימפסון אם לבצע

אינטרפולציה בעזרת פולינומים של הרמיט.

שגיאת סימפסון

נציב בנוסחת השגיאה $f(x)=x^3$ אזי מתקיים $f'''(x)=6=3!$

ומנוסחת השגיאה (1) נובע

$$E_2^S\left[x^3;x_0,x_1,x_2\right]=\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=\int_{-h}^{h}z(z^2-h^2)dz=0$$

הצבה

$z=x-x_1$

פונק' אי זוגית בקטע סימטרי

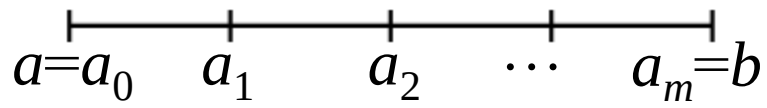
מסקנה חשובה:

נוסחת סימפסון מדויקת עבור כל פולינום ממעלה ≥ 3

סדר השגיאה הוא 5

שיטות ניוטון-קוטס מורכבות

כמו לאינטרפולציה, הדרך להגדלת דיוק השיטה היא לא הגדלת n אלא חלוקת הקטע (a, b) ל m תת-קטעים ובניית פולינומים מדרגה נמוכה בכל תתי-הקטעים האלו:



נפרק את האינטגרל לסכום של m אינטגרלים

$$I=\int_{a}^{a_1} f(x)dx+\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx+\ldots+\int_{a_{m-1}}^{b} f(x)dx$$

וכל אחד מהאינטגרלים נחשב לפי נוסחת נ"ק עם n+1 נקודות.

שאלה: כמה סה"כ נקודות נצטרך לחישוב האינטגרל?

התשובה:

$$m\cdot(n+1)-(m-1)=m\cdot n+1$$

תת-קטעים

נקודות בכל תת-קטע

נקודות משותפות

מרחק בין הנקודות הוא $h=(b-a)/mn$. ניתן להקטין את h ע"י הגדלת m ללא שינוי של n. ז"א אפשר להסתפק ב n קטן (למשל 1 או 2) ועדייו להגיע לדיוק גבוה. זה יתרון גדול של שיטות מורכבות.

שיטת הטרפז וסימפסון : נוסחאות מורכבות

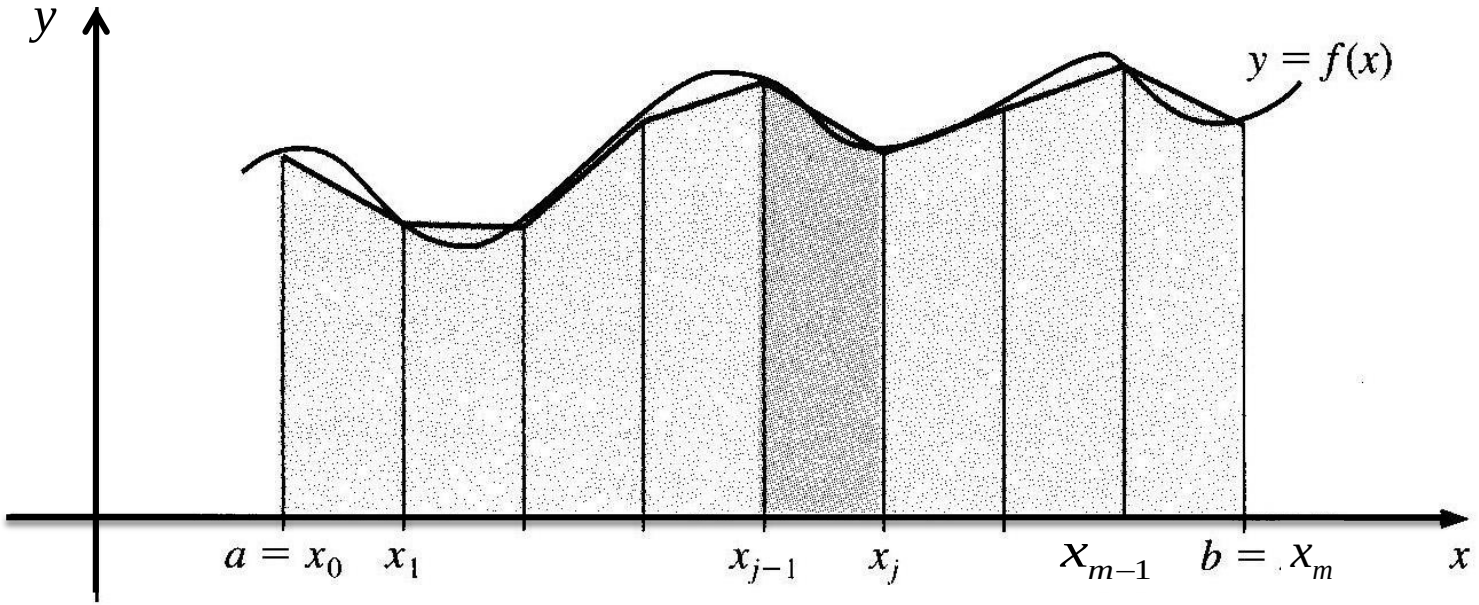
נתחיל מ**שיטת הטרפז המורכבת**. בכל תת-קטע i נוסחת הטרפז היא:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] + E_T^{(i)}$$

נסכם את הביטויים האלה על כול תתי-הקטעים. נקבל:

$$I_T = \frac{h}{2}\left[(f(a)+f_1)+(f_1+f_2)+(f_2+f_3)+\ldots+(f_{mn-1}+f(b)\right] =$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + f_m\right],\ h = \frac{b-a}{m},\ f_0 = f(a),\ f_m = f(b)$$

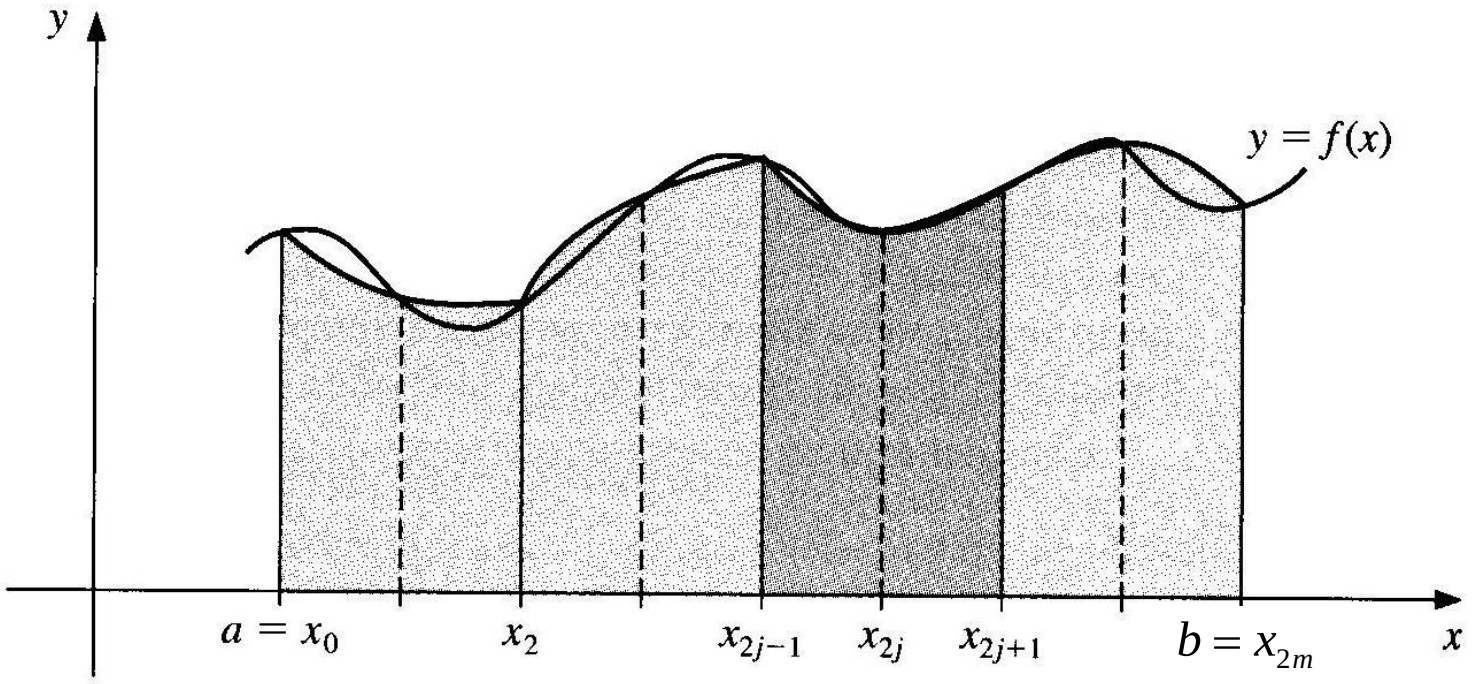


נכתוב נוסחה לשיטה יעילה ושימושית מאד - **שיטת סימפסון המורכבת** .

נזכור כי שיטת סימפסון היא שיטה עבור $n=2$ כך ש $h=(b-a)/2m$

$$I_S = \frac{h}{3}\left[(f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \ldots + (f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m})\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 \ldots + f_{2m}\right]$$



הערכת שגיאה בנוסחאות מורכבות

שיטת טרפז

נניח כי קטע $[a,b]$ מחולק ל- m תת-קטעים באורך שווה $h=\frac{b-a}{m}$

שגיאה בתת – קטע i $\Leftarrow \quad \left|E_T^{(i)}\right| \le \frac{h^3}{12}\left|f''(\eta_i)\right|$

$$\left|E_T^{total}\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} E_T^{(i)}\right| \le \frac{h^3}{12}\left|\sum_{i=1}^{m} f''(\eta_i)\right| \le \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{m}\left|f''(\eta_i)\right| = \frac{h^2(mh)}{12}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|f''(\eta_i)\right|\right)$$

$$\left|E_T^{total}\right| \le \frac{h^2(b-a)f''(\tilde{\eta})}{12}$$

השגיאה הכוללת היא מסדר 2

שיטת סימפסון

נניח כי קטע $[a,b]$ מחולק ל- 2m תת-קטעים באורך שווה $h=\frac{b-a}{2m}$

שגיאה בתת – קטע i $\left|E_S^{(i)}\right| \le \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\xi_i)\right| \quad \Leftarrow$

$$\left|E_S^{total}\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} E_S^{(i)}\right| \le \frac{h^5}{90}\left|\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i)\right| \le \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m}\left|f^{(4)}(\xi_i)\right| = \frac{h^4(2mh)}{180}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|f^{(4)}(\xi_i)\right|\right)$$

$$\left|E_S^{total}\right| \le \frac{h^4(b-a)f^{(4)}(\tilde{\xi})}{180}$$

השגיאה הכוללת היא מסדר 4

שיטת גאוס לאינטגרציה

Gaussian Quadrature

ראינו כי "המחליף הנומרי" של האינטגרל $I = \int_a^b f(x)dx$

הוא מהצורה $I^{num} = \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i)$

אפשר להגדיל דיוק החישוב ע"י בחירה חכמה של נקודות $\{x_i\}_{i=1,..,m}$

ומשקלים W_i

נדרוש שהאינטגרלים הבאים יחושבו בצורה מדויקת

$$\int_a^b x^{k-1}dx = \frac{b^k - a^k}{k} \doteq A_{k-1}$$

כלומר,

$$I_{num} = \sum_{i=1}^{n} W_i x_i^k = A_k = I$$

כמה משוואות $(*)\ \sum_{i=1}^{n} W_i x_i^k = A_k$ **ניתן לקיים בו זמנית?**

- ישנם 2n נעלמים : הנקודות x_i ו המשקלים W_i ⬅ דרושות $2n$ משוואות

כך שהקשר (*) יתקיים בצורה מדויקת !

- הערכים $A_k = \int_a^b x^k dx$ תלויים בגבולות האינטגרציה a ,b. $k = 0,1,\ldots,2n-1$

מה תהייה דרגת הדיוק של השיטה ? ⬅ **$2n-1$**

- עבור גבולות האינטגרלים [1, -1], המקדמים A_k :

$$A_k = \int_{-1}^{1} x^k dx = \begin{cases} 2/(k+1), & k = 0, 2, \ldots, 2n-2 \\ 0, & k = 1, 3, \ldots, 2n-1 \end{cases}$$

- כעת נפתור את מערכת המשוואות:

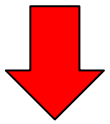
$$\sum_{i=1}^{n} W_i x_i^k = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$$

- המשקלים ואת הנקודות שיתקבלו מהפתרון מהווים טבלה הניתנת לשימוש לצורך אינטגרציה נומרית לפי הנוסחה:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i) + E_n$$

- במידה וצריך לחשב אינטגרל בקטע כלשהו [a,b] מבצעים שינוי משתנה:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2}dt$$



$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(x(t))dt$$

שיטת גאוס - לז'נדר : מקרה של n=2

נתבונן מקרה של $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx$

נקבל $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1)+W_2 f(x_2)$ (1)

ישנם 4 משתנים W_1, W_2, x_2, x_1 $\Leftarrow$ דרושות 4 משוואות

לכן נדרוש חישוב מדויק של

האינטגרלים (1)

עבור $f(x)=1, x, x^2, x^3$

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = W_1 + W_2$$

$$\int_{-1}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0 = W_1 x_1 + W_2 x_2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0 = W_1 x_1^3 + W_2 x_2^3$$

פתרון המערכת :

$$W_1 = W_2 = 1, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

מכאן, נוסחת אינטגרציה

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \doteq G_2(f) + E_2^G(f)$$

$$E_2^G(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{135}$$

היא נקראת **נוסחת גאוס-לז'נדר דו-נקודתית**.

שם	סימון	קטע	פונקציית משקל	פולינומי המשפחה
Legendre	P_k	$[-1,1]$	1	$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

Recursion formula :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \\ (k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0 \end{cases}$$

טבלת הנקודות והמשקלים לשיטות גאוס – לז'נדר

Points	Weighting Factors	Function Arguments
2	$c_1 = 1.000000000$ $c_2 = 1.000000000$	$x_1 = -0.577350269$ $x_2 = 0.577350269$
3	$c_1 = 0.555555556$ $c_2 = 0.888888889$ $c_3 = 0.555555556$	$x_1 = -0.774596669$ $x_2 = 0.000000000$ $x_3 = 0.774596669$
4	$c_1 = 0.347854845$ $c_2 = 0.652145155$ $c_3 = 0.652145155$ $c_4 = 0.347854845$	$x_1 = -0.861136312$ $x_2 = -0.339981044$ $x_3 = 0.339981044$ $x_4 = 0.861136312$
5	$c_1 = 0.236926885$ $c_2 = 0.478628670$ $c_3 = 0.568888889$ $c_4 = 0.478628670$ $c_5 = 0.236926885$	$x_1 = -0.906179846$ $x_2 = -0.538469310$ $x_3 = 0.000000000$ $x_4 = 0.538469310$ $x_5 = 0.906179846$
6	$c_1 = 0.171324492$ $c_2 = 0.360761573$ $c_3 = 0.467913935$ $c_4 = 0.467913935$ $c_5 = 0.360761573$ $c_6 = 0.171324492$	$x_1 = -0.932469514$ $x_2 = -0.661209386$ $x_3 = -0.2386191860$ $x_4 = 0.2386191860$ $x_5 = 0.661209386$ $x_6 = 0.932469514$

שיטת גאוס - לז'נדר n - נקודתית

נקודות הן סימטריות לגבי הראשית וסכום המשקלים תמיד שווה ל-2

שגיאת האינטגרציה לפי שיטת גאוס

שגיאת האינטגרציה מוגדרת כ:

$$E_n = I - I_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i)$$

ניתן להוכיח כי

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\eta), \qquad -1 < \eta < 1$$

דרגת הדיוק היא אכן 2n-1

אינטגרציה לפי שיטת גאוס-לז'נדר (דוגמה)

חשבו את האינטגרל $I=\int_1^3 \frac{dx}{x}$ בשיטת גאוס עם 3 נקודות (n=3).

לפני חישוב האינטגרל נבצע שינוי משתנה כדי שהגבולות תהינה [-1,1] :

$$x=\frac{3-1}{2}t+\frac{3+1}{2}=t+2, \quad dx=dt$$

$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$ → $x_{2,3}=\pm\sqrt{0.6},\ x_1=0, \quad W_{2,3}=5/9,\ W_1=8/9$ לפי הטבלה:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t+2}=\underbrace{\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{0.6}}+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2+0}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{0.6}}}_{1.098039}+E_3$$

נעריך את השגיאה: $E_3=\frac{2^7\cdot 6^4}{7\cdot(6!)^3}f^{(6)}(\eta)$

$$2.10^{-5}\approx\frac{8}{175}\cdot\frac{1}{3^7}\le E_3\le\frac{8}{175}\cdot\frac{1}{1^7}\approx 4.6\cdot 10^{-2} \quad \Leftarrow \quad f^{(6)}(\eta)=\frac{6!}{(2+\eta)^7}$$

הפתרון המדויק הוא $\ln 3 = 1.0986123$ (השגיאה האמיתית היא $6\cdot 10^{-4}$)

יתרונות וחסרונות של שיטת גאוס

- דרגת הדיוק של שיטות גאוס גבוה כמעט פי 2 מזאת של שיטת סימפסון עם אותו n.

- אבל שיטת סימפסון מורכבת קלה יותר ליישום ממוחשב וגם מאפשרת חישוב מדויק ויעיל

היתרון של שיטות גאוס בא לידי ביטוי בחישוב של אינטגרלים מיוחדים כגון:

א- מומנטים: $I_k = \int_0^1 x^k f(x)dx, \quad k = 0, 1, 2$

ב- אינטגרלים עם גבולות אין-סופיים:

$$I = \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx, \quad I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x)dx$$

ג- אינטגרלים מפונקציות סינגולאריות כמו:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx, \quad I = \int_0^1 \ln(x) f(x)dx$$

ניתן לפתח שיטות גאוס לכל סוגי האינטגרלים האלו בדרך שבה פיתחנו שיטת גאוס – לז'נדר.

שיטת Gauss-Chebyshev

שיטת צ'בישב מיועדת לחישוב אינטגרלים עם סינגולאריות מהסוג

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

את האינטגרל הנומרי שוב ניתן לחשב כ- $I = \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i) + E_n$

כאשר הנקודות, המשקלים והשגיאה הם:

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$W_i = \frac{\pi}{n}$$

$$E_n = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \qquad 1 \le \eta \le 1$$

דוגמת חישוב לפי שיטת Gauss-Chebyshev

דוגמה: חשבו

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

האם ניתן לחשב את האינטגרל לפי שיטת גאוס צ'בישב?

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos(\pi/4)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\cos(3\pi/4)^2}} \right) = 2.565$$

$$I_6 = 2.622027185, \quad I_{10} = 2.622057534, \quad E_{10} = 2 \cdot 10^{-8}$$

הערכת השגיאה לפי אקסטראפולציה של ריצ'רדסון

- הקושי בהערכת שגיאת אינטגרציה הוא בחישוב של $f''(\tilde{\eta})$ ו- $f^{(4)}(\tilde{\xi})$
- השיטה של אקסטראפולצית ריצ'רדסון מסייעת להתגבר על הבעיה.

אקסטרפולציית ריצ'רדסון להערכת השגיאה בשיטת הטרפז.

$$I_{exact} = \int_a^b f(x)\,dx = I_n + E_n$$

$$\left|E_T^{total}\right| \le \frac{h^2(b-a)f''(\tilde{\eta})}{12} \Rightarrow I_{exact} = I_T + E_T^{total} \approx I_T + C\cdot h^2$$

כאשר הקבוע C הוא $C = \frac{(b-a)}{12} f''(\eta)$

הערכת C

1. נבצע אינטגרציה עם $h_1 = (b-a)/m_1$ $\Rightarrow$ $I_{exact} \approx I_T^{(1)} + C\cdot h_1^2$
2. נבצע אינטגרציה עם $h_2 = (b-a)/m_2$ $\Rightarrow$ $I_{exact} \approx I_T^{(2)} + C\cdot h_2^2$

אקסטראפולציית ריצ'רדסון (המשך)

נשווה :

$$I_{exact} \approx I^{(1)} + C \cdot h_1^2 = I^{(2)} + C \cdot h_2^2$$

נחלץ את C ממשוואה הזאת:

$$C = \frac{I^{(2)} - I^{(1)}}{h_1^2 - h_2^2}$$

ובכן, השגיאות בחישוב הראשון והשני הם:

$$E_T^{(1)} \approx C \cdot h_1^2 = \frac{I_T^{(2)} - I_T^{(1)}}{1 - \left(h_2/h_1\right)^2} = \frac{I_T^{(2)} - I_T^{(1)}}{1 - \left(m_1/m_2\right)^2}$$

$$E_T^{(2)} \approx C \cdot h_2^2 = \frac{I_T^{(2)} - I_T^{(1)}}{\left(h_1/h_2\right)^2 - 1} = \frac{I_T^{(2)} - I_T^{(1)}}{\left(m_2/m_1\right)^2 - 1}$$

אפשר לתקן את החישוב הנומרי של האינטגרל ע"י הוספת אבר השגיאה:

$$I_{corrected} = I_T^{(2)} + E_T^{(2)} = I_T^{(2)} + \frac{I_T^{(2)} - I_T^{(1)}}{\left(m_2/m_1\right)^2 - 1}$$

אקסטראפולציית ריצ'רדסון (המשך)

באותה הדרך נעשת הערכת השגיאה בשיטת **סימפסון מורכבת** :

$$I_{exact} \approx I_s + C \cdot h^4$$

$$I_{exact} \approx I_S^{(1)} + C \cdot h_1^4 = I_S^{(2)} + C \cdot h_2^4 \quad \Leftarrow \quad h_1 = (b-a)/2m_1, h_2 = (b-a)/2m_2$$

מכאן

$$C = \frac{I_S^{(2)} - I_S^{(1)}}{h_1^4 - h_2^4}$$

השגיאות בחישוב הראשון והשני הם:

$$E_S^{(1)} \approx C \cdot h_1^4 = \frac{I_S^{(2)} - I_S^{(1)}}{1-\left(h_2/h_1\right)^4} = \frac{I_S^{(2)} - I_S^{(1)}}{1-\left(m_1/m_2\right)^4}$$

$$E_S^{(2)} \approx C \cdot h_2^4 = \frac{I_S^{(2)} - I_S^{(1)}}{\left(h_1/h_2\right)^4 - 1} = \frac{I_S^{(2)} - I_S^{(1)}}{\left(m_2/m_1\right)^4 - 1}$$

מוסיפים את התיקון לחישוב הנומרי של האינטגרל ומקבלים:

$$I_{corrected} = I_S^{(2)} + E_S^{(2)} = I_S^{(2)} + \frac{I_S^{(2)} - I_S^{(1)}}{\left(m_2/m_1\right)^4 - 1}$$

אקסטרפולציית ריצ'רדסון : מקרה כללי

נניח כי לכל h ***קטן ישנה נוסחא נומרית*** $N(h)$ ***שהיא קירוב של איזשהו ערך*** M ***לא ידוע :***

$$M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \ldots$$

$$M = N(h) + O(h)$$

במילים אחרות

מצד שני

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h}{2} + K_2 \frac{h^2}{4} + K_3 \frac{h^3}{8} + \ldots$$

$$2M = 2N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 h + K_2 \frac{h^2}{2} + K_3 \frac{h^3}{4} + \ldots$$

$$2M = 2N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 h + K_2 \frac{h^2}{2} + K_3 \frac{h^3}{4} + \ldots$$

$$M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \ldots$$

$$M = 2N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h) + K_2\left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + K_3\left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \ldots$$

או

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h)\right] + K_2\left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + K_3\left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \ldots$$

אקסטרפולציית ריצ'רדסון : מקרה כללי

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h)\right] + K_2\left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + K_3\left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \ldots$$

$$N_1(h) = N(h), \quad N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]$$

אזי

$$M = N_2(h) - \frac{K_2}{2}h^2 - \frac{3K_3}{4}h^3 + \ldots = N_2(h) + O(h^2)$$

סדר השגיאה הוא 2

אקסטרפולציית ריצ'רדסון : מקרה כללי

$$\left.\begin{aligned} M &= N_2(h) - \frac{K_2}{2}h^2 - \frac{3K_3}{4}h^3 + \ldots \\ M &= N_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{K_2}{8}h^2 - \frac{3K_3}{32}h^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$M = N_3(h) + \frac{K_3}{8}h^3 + \ldots = N_3(h) + O(h^3)$$

סדר השגיאה הוא 3

כאשר

$$N_3(h) = N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2\left(h/2\right) - N_2(h)}{3}$$

באופן כללי

$$M = N_j(h) + O(h^m)$$

$$N_j(h) \doteq N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1}, \quad j = 2,3,\ldots,m$$

כאשר M – ערך , $N(h)$ - קירוב נומרי של M , h – צעד