תרגיל 7 – קיצון מוחלט ואינטגרלים כפולים ומשולשים

1. מצאו את הערכים המקסימליים והמינימליים של הפונקציות הבאות בתחומים המתאימים:

   א. $f(x,y)=3x-5y+7$ בתחום $D=\left\{(x,y):x^2+2y^2\le 2\right\}$

   ב. $f(x,y)=6x^2+5y^2-10y-12x+7$ במשולש בעל הקודקודים $(0,0),(0,3),(3,0)$

   ג. $f(x,y)=x^2+7y^2-13x-1$ בתחום הכלוא בין $y=-x^2+13x-40$ ו $y=-8$

   ד. $f(x,y)=x+y$ בתחום $D=\left\{(x,y):xy\ge 4,x+2y\le 9,x>0,y>0\right\}$

2. מצאו את המרחק בין $(0,0)$ לעקומה $-9+49x^2-36y^2=0$

(זכרו: המרחק בין נקודה נתונה לקבוצה הוא המרחק הקצר ביותר בין הנקודה הנתונה לנקודה כלשהי בקבוצה.)

3. מהו ערך ציר x המקסימלי של נקודה כלשהי על העקומה $2525-90x+9x^2+576y+36y^2=0$?

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

   א. $\int_0^{\pi}\int_0^1 x^3\cos\left(x^2y\right)dxdy$

   ב. $\iint_D \frac{x^2-6}{1+y^2}dxdy$ בתחום $D=[0,1]\times[0,1]$

   ג. $\iint_D \frac{1}{\left(x+y\right)^2}dxdy$ בתחום $D=[4,6]\times[6,9]$

   ד. $\int_0^3\left(\int_{3x}^9 \sin(y^2)\,dy\right)dx$

   ה. $\iint_D \sin^5(8x)\,\mathrm{e}^{\sqrt{y}}\,dxdy$ כאשר D הוא המשולש בעל הקודקודים $(-2,0),(0,2),(2,0)$

5. החליפו את סדר האינטגרציה:

   א. $\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

   ב. $\int_0^1\int_0^{4x^2} f(x,y)dydx+\int_1^{17}\int_0^{\sqrt{17-x}} f(x,y)dydx$

   ג. $\int_{-1}^1\int_{4x^3}^{\sqrt{17-x^2}} f(x,y)dydx$

6.

א. חשבו את נפח התחום $D=\left\{(x,y,z):1\le x^2+y^2\le 4-z^2\right\}$

ב. חשבו את המסה של הגוף $D=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 3, x^2+y^2\le 2z\right\}$ בעל פונקצית הצפיפות $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

7. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\iiint_D (x+y+z)dxdydz$ בתחום $D=\left\{(x,y,z):\sqrt{y^2+z^2}\le x\le\sqrt{4-y^2-z^2}\right\}$

ב. (ממבחן של דר' הורוביץ) $\int_{-2}^{2}dx\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z^2dz$

ג. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ בתחום $D=\left\{(x,y):\left(x^2+y^2\right)^2\le x^2-y^2, x\ge 0\right\}$

ד. $\iint_D \sqrt{3\sqrt{x}+2\sqrt{y}}\,dxdy$ בתחום $D=\left\{(x,y):\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\right\}$

ה. $\iint_D xye^{x^2-y^2}dxdy$ בתחום $D=\left\{(x,y):0\le x\le 4, 0\le y, 1\le x^2-y^2\le 9\right\}$

שאלות לא חובה, שלא מופיעות במערכת:

8. מצאו את שטח הפנים המינימלי של גליל בעל נפח 16π, והוכיחו שהוא אכן מינימלי.

תזכורת: גליל בעל רדיוס r וגובה h הינו בעל נפח $\pi r^2 h$ ושטח פנים $2\pi r(r+h)$.

9. מצאו את השטח המקסימלי של מלבן החסום באליפסה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, והוכיחו שהוא אכן מקסימלי.

(מותר להניח שצלעות המלבנים החסומים מקבילות לצירים.)