לינארית 1, סמסטר קיץ תשפ"ו, מועד ב'

17.9.2026, ו' תשרי התשפ"ז

מרצים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אליהו מצרי, ארז שיינר.
מתרגלים: הראל רוזנפלד, שירה ידעי, ישי זגדון, פלדמן עדו, נעה כהן, דניאל עומר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

<u>תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.</u>

<u>ניתן לענות משני צידי הדף.</u>

בהצלחה!

1. (11 נקודות לסעיף) נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -2 \\ 4 & -4 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

השייכת ל $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

(א) מצאו בסיס ל $R(A)$.

(ב) מצאו בסיס ל $C(A) \cap N\left(A^2\right)$.

(ג) הוכיחו או הפריכו: קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש $C(B) = C(A), N(B) = R(A)$.

2. (9 נקודות לסעיף) התבוננו במרחב $W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \operatorname{tr}(A) = 0\right\}$. נתונות המטריצות

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ a & 2a+1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a^2+a & 2 \\ 1 & -a^2-2a-1 \end{pmatrix}$$

כאשר a פרמטר ממשי.

(א) קבעו לכל ערך של a האם $\{A_1, A_2, A_3\}$ הוא בסיס ל W.

(ב) לכל ערך a שעבורו $\{A_1, A_2, A_3\}$ הוא בסיס ל W, מצאו מטריצה $A_4 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

בסיס ל $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

3. (9 נקודות לסעיף) יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו B, C שני בסיסים סדורים של V. תהא $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם במטריצה $[T]_C^B$ יש שורת אפסים אז במטריצה $[T]_C^C$ יש שורת אפסים.

(ב) אם במטריצה $[T]_C^B$ יש שורת אפסים אז במטריצה $[T]_B^B$ יש שורת אפסים.

4. (9 נקודות לסעיף) ענו על הבאים:

(א) יהיו a, b, c פרמטרים ממשים ונסתכל על

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

נגדיר עוד

$$W = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists B \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \det\left(AA^t\right) = \det\left(-B^tB\right)\right\}$$

הוכיחו ש W תת מרחב ומצאו לו בסיס.

(ב) תהא $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ כך ש $\operatorname{rank}(A) = 3$. הוכיחו או הפריכו: A^tA מטריצה שאינה הפיכה.

5. (9 נקודות לסעיף) ענו על הבאים:

(א) יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. נסמן $\dim V = n, \dim W = m$ ($1 \leq n, m$ טבעיים).
תהא $T : V \to W$ ה"ל.
הוכיחו: אם T על אז קיימת ה"ל $S : W \to V$ כך ש $T \circ S = I$ כאשר I היא העתקת הזהות על W.

(ב) תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ונגדיר את העתקה $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ של כפל במטריצה A (כלומר $T_A(v) = Av$).
הוכיחו או הפריכו: אם T_A על אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ כך ש $AB = I_m$ כאשר I_m היא מטריצת היחידה.