לינארית השלמה

21 בינואר 2021

1 לכסון ולכסון או"ג

תרגילים:

1. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה P כך ש־:

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ & 2 & \pi \\ & & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & e & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון: הערכים העצמיים של שתי המטריצות הם: 1,2,3, כיון שיש להם שלושה ע"ע שונים, נקבל שהן לכסינות (כי הר"א של כל ע"ע הוא 1, והר"ג הוא בין 1 לר"א, ולכן גם 1). כלומר, יש Q הפיכה כך ש־

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ & 2 & \pi \\ & & 3 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

בנוסף, יש O הפיכה כך ש־

$$O^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & e & 3 \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

כלומר, קיבלנו:

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ & 2 & \pi \\ & & 3 \end{pmatrix} Q = O^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & e & 3 \end{pmatrix} O$$

נכפיל ב־ O משמאל, O^{-1} מימין ונקבל:

$$OQ^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ & 2 & \pi \\ & & 3 \end{pmatrix}QO^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & e & 3 \end{pmatrix}$$

ולכן $P = QO^{-1}$, ולכן $P^{-1} = \left(QO^{-1}\right)^{-1} = OQ^{-1}$, וקיבלנו את הדרוש.

2. לכסנו או"ג את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון, לפי שלבי לכסון או"ג:

(א) נמצא ע"ע, כמו במטריצה רגילה.

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

קיבלנו ע"ע 1 עם ר"א 1, ע"ע -2 עם ר"א 2.

(ב) נמצא וקטורים עצמיים, כמו במטריצה רגילה:

עבור ע"ע 1:

$$N(\lambda I - A) = N\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$N\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור ע"ע -2:

$$N\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(ג) לכל מרחב עצמי בנפרד, נעשה תהליך גראם־שמידט כדי להגיע לבסיס או"ג:
עבור V_1 כיון שיש רק ו"ע אחד, מספיק פשוט לנרמל אותו, ולקחת את הוקטור:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

עבור V_{-2}, נצטרך לבצע את התהליך המלא: באופן כללי, בהינתן בסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ תהליך גראם שמידט הוא:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \pi_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נותר לנרמל את v_2, v_3 ולקבל:

$$\widetilde{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \widetilde{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(ד) לבסוף ניקח את

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$P^tAP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

3. בצעו תהליך גראם שמידט על $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2 שאלות מהקהל

1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שלכל $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים: $v^tAv > 0$. הוכיחו: A הפיכה
הוכחה. נב"ש ש־A לא הפיכה, לכן יש פתרון לא טרייוויאלי $v \neq 0$ כך ש־ $Av = 0$,
ואז:

$$v^tAv = v^t0 = 0$$

בסתירה.

2. האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ לכסינה?
פתרון:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

ולכן אין ע"ע.

3. האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ לכסינה?
פתרון:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

וקיבלנו ע"ע $\pm i$, וכיון שיש לנו שני ע"ע שונים היא לכסינה.

4. האם כל מטריצה מעל $\mathbb{C}$ לכסינה?
פתרון: אמנם תמיד יש n ע"ע, אך לא בטוח שר"א שווה ר"ג. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות שלא לכסינה: יש לה ע"ע 0 בר"א 2. נחשב ריבוי גיאומטרי:

$$\dim V_0 = \dim N(0I - A) = \dim N(A) = 1$$

ולכן ר"ג הוא 1. קיבלנו שהריבויים שונים ולכן לא לכסינה.

5. חיתוך תתי מרחבים. השיטה שאני רוצה לדבר עליה: נניח $W, U \leq \mathbb{R}^n$, ומחפשים חיתוך בין $W \cap U$. נמצא מטריצות $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ כך ש־

$$W = N(A), U = N(B)$$

ואז:

$$W \cap U = N \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

$$U = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = -v\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

פתרון: נתחיל מלסדר את U: נשים לב:

$$U = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = -v\} = \{v : Av + v = 0\}$$

$$= \{v : (A + I)v = 0\} = N(A + I) =$$

$$N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

עכשיו נסדר את W:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא את התנאים על W באופן הבא:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & z-x-2y \end{array}\right)$$

ולכן: $v \in W \iff -x-2y+z=0$ ולכן

$$W = N\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ובסה"כ:

$$U \cap W = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdots$$

הערה: בהינתן $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אז:

$$N(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$R(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$C(A) \subset \mathbb{R}^m$$

7. מה עושים כאשר מבקשים למצוא משהו לגבי איחוד תתי מרחבים?
פתרון: ביהנתן תתי מרחבים $U, W \leq V$ המשפט אומר: $U \cup W$ תת־מרחב אמ"ם $U \subset W$ או $W \subset U$. אז פשוט לוקחים את המכיל.

8. חיתוך של $W = span\{e_1, e_2\}, U = span\{e_1, e_3\}$

9. תהי A מטריצה. מצאו B, C הפיכות כך ש־ $A = B + C$. כולן ריבעויות מסדר n.
פתרון: ראשית, ל־A יש לכל היותר n ע"ע שונים. לכן בהכרח קיים $0 \neq c \in \mathbb{R}$ שאיננו ע"ע של A. אם c לא ע"ע של A, אז המטריצה $cI - A$ הפיכה. נב"ש שאיננה הפיכה, לכן יש $v \neq 0$ כך ש־

$$(cI - A)v = 0$$

$$cIv = Av$$

$$Av = cv$$

ולכן c ע"ע של A בסתירה. קיבלנו $cI - A$ הפיכה ולכן גם $-(cI - A) = A - cI$ הפיכה.
בנוסף, כמובן ש־ cI הפיכה. בסה"כ:

$$A = \underbrace{A - cI}_{B} + \underbrace{cI}_{C}$$

10. דוגמא לדבר שכדאי להבין: בהינתן בסיס או"נ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ של מ"ו V, אז:

$$\forall u \in V : u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i$$