חוברת הדרכה לפתרון משוואות טריגונומטריות

חלק א': משוואות בסיסיות:

1. משוואה מהצורה $\sin x=\sin\alpha$ ← הפתרון הכללי: $\begin{cases}X_1=\alpha+360^0k\\X_2=180^0-\alpha+360^0k\end{cases}$.

$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ldots$

כאשר k=0 נקבל את הפתרונות במחזור החיובי הראשון.
כאשר k=1 נקבל את הפתרונות במחזור החיובי השני וכך הלאה.
כאשר k=-1 נקבל את הפתרונות במחזור השלילי הראשון וכך הלאה.

דוגמאות:

א. $\boxed{\sin 5x=0.8\left(=\sin 53.13^0\right)}$

$5x_1=53.13^0+360^0k\ /:5$ | $5x_2=126.87^0+360^0k$

$x_1=10.62^0+72^0k$ | $x_2=25.37^0+72^0k$

ב. $\boxed{\sin\left(3x+20^0\right)=\sin x}$

$3x+20^0=x+360^0k$ | $3x+20^0=180^0-x+360^0k$

$2x=-20^0+360^0k\ /:2$ | $4x=160^0+360^0k\ /:4$

$x_1=-10^0+180^0k\Rightarrow x_1=170^0+180^0k$ | $x_2=40^0+90^0k$

הערה: אם הפיתרון הכללי יוצא שלילי (לדוגמא X_1 בדוגמא ב'), אפשר לרשום את הפיתרון הכללי כשמתחילים מהפתרון החיובי הראשון וזאת ע"י כך שמוסיפים לפיתרון השלילי את המחזור של הפתרון. בדוגמא: ל -10^0 מוסיפים 180^0, שזהו המחזור של הפיתרון ומקבלים 170^0.

2. משוואה מהצורה $\cos x=\cos\alpha$ ← הפתרון הכללי: $\begin{cases}X_1=\alpha+360^0k\\X_2=-\alpha+360^0k\end{cases}$.

דוגמאות:

א. $\boxed{\cos 3x=\cos 130^0}$

$3x=\pm130^0+360^0k$

$x=\pm43.33^0+120^0$

ב. $\boxed{\cos\left(2x-60^0\right)=\cos\left(3x+10^0\right)}$

$2x-60^0=-3x-10^0+360^0k$

$5x=50^0+360^0k\ /:5$

$x_2=10^0+72^0k$

$2x-60^0=3x+10^0+360^0k$

$-x=70^0+360^0k\ /\cdot(-1)$

$x_1=-70^0+360^0k$

$\Rightarrow x_1=290^0+360^0k$

הערה: כאשר יש צורך לכפול או לחלק את אגפי המשוואה במספר שלילי הסימן של המחזור של המשוואה יישאר תמיד חיובי.

3. משוואה מהצורה $\begin{cases}\tan x=\tan\alpha\\ \cot x=\cot\alpha\end{cases}$ ← **הפתרון הכללי:** $x=\alpha+180^0k$.

דוגמא:

$$\boxed{3\tan\left(2x+10^0\right)=6\sqrt{3}}\ /:3$$

$$\tan\left(2x+10^0\right)=2\sqrt{3}$$

א. $$\tan\left(2x+10^0\right)=\tan 73.9^0$$

$$2x+10^0=73.9^0+180^0k$$

$$2x=63.9^0+180^0k\ /:2$$

$$\underline{x=31.95^0+90^0k}$$

סיכום המקרים + מקרים פרטיים:

משוואה	פתרון\ות
$\sin X=\sin\alpha$	$X_1=\alpha+360^0k$ $X_2=180^0-\alpha+360^0k$
$\sin X=-\sin\alpha$	$\sin X=\sin(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\sin X=0$	$X=180^0k$
$\sin X=1$	$X=90^0+360^0k$
$\sin X=-1$	$X=-90^0+360^0k$
$\cos X=\cos\alpha$	$X_1=\alpha+360^0k$ $X_2=-\alpha+360^0k$
$\cos X=-\cos\alpha$	$\cos X=\cos(180-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית המשלימה ל-180.
$\cos X=0$	$X=90^0+180^0k$
$\cos X=1$	$X=360^0k$
$\cos X=-1$	$X=180^0+360^0k$
$\tan X=\tan\alpha$	$X=\alpha+180^0k$
$\tan X=-\tan\alpha$	$\tan X=\tan(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\cot X=\cot\alpha$	$X=\alpha+180^0k$
$\cot X=-\cot\alpha$	$\cot X=\cot(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.

חלק ב: שיטות עבודה לפיתרון משוואות טריגונומטריות מורכבות

1. משוואות מהצורה $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = a$

משתמשים בנוסחאות:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

דוגמאות:

$$\boxed{\sin^2 x = 0.64}$$
$$\frac{1-\cos 2x}{2} = 0.64$$
$$1-\cos 2x = 1.28$$
$$\cos 2x = -0.28$$
$$2x = \pm 106.26^0 + 360^0 k \;/:2$$
$$x = \pm 53.13^0 + 180^0 k$$

הדרך הנוספת לפתרון היא הוצאת שורש ריבועי לשני אגפי המשוואה ואז לפתור שתי משוואות פשוטות : Sinx = 0.8 ו - sinx = -0.8 בדרך זו נקבל 4 פתרונות כלליים.

2. פתירת משוואות הכוללות אותה פונקציה בשני האגפים:

דוגמאות: 1)

$$\boxed{\sin 3x + \sin 2x = 0}$$
$$\sin 3x = -\sin 2x$$
$$\sin 3x = \sin(-2x)$$
$$3x = -2x + 360^0 k$$
$$5x = 360^0 k$$
$$\underline{x_1 = 72^0 k}$$
$$3x = 180^0 + 2x + 360^0 k$$
$$\underline{x_2 = 180^0 + 360^0 k}$$

2)

$$\boxed{\cot 4x \cdot \cot(2x+30) = 1}$$
$$\cot 4x = \frac{1}{\cot(2x+30)}$$
$$\cot 4x = \tan(2x+30)$$
$$\cot 4x = \cot(60-2x)$$
$$4x = 60^0 - 2x + 180^0 k$$
$$6x = 60^0 + 180^0 k$$
$$\underline{x = 10^0 + 30^0 k}$$

חשוב לזכור כי:

א. $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ ב. $-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$ ג. $-\cot\alpha = \cot(-\alpha)$ ד. $-\cos\alpha = \cos(180^0 - \alpha)$

3. פתירת משוואות על ידי מעבר לאותה הפונקציה :

נוסחאות שימושיות למעבר לאותה הפונקציה :

א. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ ב. $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ג. $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ ד. $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

ה. $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ו. $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

דוגמאות: 1)

$$\boxed{\cos 2x = 10\cos^2\frac{x}{2} - 8}$$

$$2\cos^2 x - 1 = 10\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$$

$$\cos x = t$$

$$2t^2 - 1 = 5 + 5t - 8$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5\pm 3}{4} = \begin{matrix} x_1 = 2 = \cos x & \Leftarrow -1 \le \cos x \le 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} = \cos x & \Rightarrow x = \pm 60^0 + 360^0 k \end{matrix}$$

2)

$$\boxed{\cos^2 x + \sin x = 1}$$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 1$$

$$\sin x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x\left(1 - \sin x\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \rightarrow \underline{x_1 = 180^0 k}$$

$$1 - \sin x = 0$$

$$\sin x = 1 \rightarrow \underline{x_2 = 90^0 + 180^0 k}$$

$$\boxed{\sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0}$$

$$\sqrt{2}\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x = 0$$

$$\sin x = a$$

$$\sqrt{2}\left(1 - a^2\right) + a = 0$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}a^2 + a = 0 \rightarrow \sqrt{2}a^2 - a - \sqrt{2} = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1\pm 3}{2\sqrt{2}} = \begin{matrix} a_1 = \sqrt{2} = \sin x \\ a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \end{matrix}$$

3)

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-45^0\right)$$

$$x_1 = -45^0 + 360^0 k \rightarrow \underline{x_1 = 315^0 + 360^0 k}$$

$$x_2 = 180^0 + 45^0 + 360^0 k \rightarrow \underline{x_2 = 225^0 + 360^0 k}$$

4. פתירת משוואות על ידי פירוק לגורמים (הבאה למכפלות)

דוגמאות: 1)

$$\boxed{\sin^3 x + \cos^2 x + \sin x = 2}$$

$$\sin^3 x + 1 - \sin^2 x + \sin x = 2$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x\left(\sin x - 1\right) + \left(\sin x - 1\right) = 0$$

$$\left(\sin x - 1\right)\left(\sin^2 x + 1\right) = 0$$

$(1.)$ $\sin^2 x + 1 \neq 0$

$(2.)$ $\sin x - 1 = 0$

$$\sin x = 1 \rightarrow \underline{x = 90^0 + 360^0 k}$$

2)

$$\boxed{\sin^2 x - \sin x + \sin x\cdot\cos x = \cos x}$$

$$\sin^2 x - \sin x + \sin x\cdot\cos x - \cos x = 0$$

$$\sin x\left(\sin x - 1\right) + \cos x\left(\sin x - 1\right) = 0$$

$$\left(\sin x - 1\right)\left(\sin x + \cos x\right) = 0$$

$(1.)$ $\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow \underline{x_1 = 90^0 + 360^0 k}$

$(2.)$ $\sin x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -\sin x$

$$\cos x = \cos\left(90 + x\right)$$

$$x = \pm\left(90 + x\right) + 360^0 k$$

$$x = 90^0 + x + 360^0 k$$

$$x = -90^0 - x + 360^0 k$$

$$2x = -90^0 + 360^0 k$$

$$x = -45 + 180^0 k \rightarrow \underline{x = 135 + 180^0 k}$$

5. פתרון משוואות בעזרת נוסחאות לסכום והפרש שתי פונקציות

הנוסחאות:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

דוגמאות:

1)

$\boxed{\sin x+\sin 3x=\cos x+\cos 3x}$

$2\sin 2x\cdot\cos x=2\cos 2x\cdot\cos x$

$\cos x\left[\sin 2x-\cos 2x\right]=0$

$(1.)\quad \cos x=0\rightarrow \underline{x_1=90^0+180^0k}$

$(2.)\quad \sin 2x-\cos 2x=0$

$\sin 2x-\sin\left(90-2x\right)=0$

$2\sin\left(2x-45^0\right)\cos 45^0=0$

$\sin\left(2x-45^0\right)=0$

$2x-45^0=180^0k$

$2x=45^0+180^0k$

$\underline{x_2=22.5^0+90^0k}$

2)

$\boxed{\sin^2 3x-\sin^2 x=\sin 2x}$

$\left(\sin 3x-\sin x\right)\left(\sin 3x+\sin x\right)=\sin 2x$

$2\cdot\sin x\cdot\cos 2x\cdot 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x=\sin 2x$

$\sin 2x\cdot\sin 4x=\sin 2x$

$\sin 2x\left[\sin 4x-1\right]=0$

$(1.)\quad \sin 2x=0\rightarrow 2x=180^0k$

$\underline{x_1=90^0k}$

$(2.)\quad \sin 4x-1=0$

$\sin 4x=1$

$4x=90^0+360^0k$

$\underline{x_2=22.5^0+90^0k}$

3)

$\boxed{\sin 3x+2\cdot\cos 4x\cdot\sin x=\frac{1}{2}}$

$\sin\left(4x-x\right)+2\cdot\cos 4x\cdot\sin x=\frac{1}{2}$

$\sin 4x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos 4x+2\cdot\cos 4x\cdot\sin x=\frac{1}{2}$

$\sin 4x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos 4x=\frac{1}{2}$

$\sin\left(4x+x\right)=\frac{1}{2}$

$\sin 5x=\frac{1}{2}=\sin 30^0$

$5x=30^0+360^0k\,/:5$ | $5x=150^0+360^0k$

$\underline{x_1=6^0+72^0k}$ | $\underline{x_2=30^0+72^0k}$

6. פתירת משוואות מהצורה $a\sin(mx)+b\cos(mx)=c$ כאשר a,b - מקדמים מספריים.

דרך הפיתרון:

על מנת לפתור משוואה מסוג זה ישנם מספר שלבים:

1. חילוק המשוואה כולה ב- **a** או ב- **b**

$\boxed{a\sin(mx)+b\cos(mx)=c}\,/:a$

$\sin(mx)+\frac{b}{a}\cos(mx)=\frac{c}{a}$

$\arctan\frac{b}{a}=\alpha\rightarrow\tan\alpha=\frac{b}{a}$

(נדגים כאשר אנו מתייחסים לחלוקה **a**)

2. המרת $\frac{b}{a}$ לפונקציית $\tan$, ואותה להמיר ל- $\frac{\sin}{\cos}$.
3. לבצע מכנה משותף של ה- $\cos$.
4. על פי הנוסחא $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\beta \cdot \sin\alpha$

להפוך את כל האגף השמאלי לפונקציה אחת,
ולהשוותה לאגף הימני (להפוכו למספרי).

דוגמאות:

(1

$\boxed{\sin x + 2\cos x = 2}$

$\tan\alpha = 2 \to \alpha = 63.43^0$

$\sin x + \tan(63.43)\cdot\cos x = 2 / : \cos(63.43)$

$\sin x \cdot \cos(63.43) + \sin(63.43)\cdot\cos x = 2\cos(63.43)$

$\sin(x + 63.43) = 0.8944$

$\sin(x + 63.43) = \sin 63.43$

$(1.)\quad x + \cancel{63.43^0} = \cancel{63.43^0} + 360^0 k$

$\underline{x_1 = 360^0 k}$

$(2.)\quad x + 63.43^0 = 180^0 - 63.43^0 + 360^0 k$

$\underline{x_2 = 53.13^0 + 360^0 k}$

(2

$\boxed{4\sin x + 3\cos x = 4}$

$4\sin x + 3\cos x = 4 / : 3$

$\frac{4}{3}\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$

$\tan\alpha = \frac{4}{3} \to \alpha = 53.13^0$

$\tan(53.13^0)\cdot\sin x + \cos x = \frac{4}{3} / \cdot \cos(53.13^0)$

$\sin(53.13^0)\cdot\sin x + \cos(53.13^0)\cdot\cos x = \frac{4}{3}\cos(53.13^0)$

$\cos(53.13^0 - x) = 0.8 = \cos(36.87^0)$

$53.13^0 - x = \pm 36.87^0 + 360^0 k$

$(1.)\quad 53.13^0 - x = 36.87 + 360^0 k$

$-x = -16.26^0 + 360^0 k$

$\underline{x_1 = 16.26^0 + 360^0 k}$

$(2.)\quad 53.13^0 - x = -36.87^0 + 360^0 k$

$-x = -90^0 + 360^0 k$

$\underline{x_2 = 90^0 + 360^0 k}$

(3

$\boxed{3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 3 / : 3}$

$\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2x = 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^0$

$\sin 2x - \tan 30^0 \cos 2x = 1$

$\sin 2x - \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}\cos 2x = 1 / \cdot \cos 30^0$

$\cos 30^0 \cdot \sin 2x - \sin 30 \cdot \cos 2x = 1 \cdot \cos 30^0$

$\sin(2x - 30^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

פתירת משוואה מהצורה $a\sin(mx) + b\cos(mx) = c$ עם מקדמים $a = b = 1$:

(מהצורה $\sin(mx) + \cos(mx) = c$)

$\boxed{\sin 2x + \cos 2x = 1.2}$

$\sin 2x + \sin\left(90^0 - 2x\right) = 1.2$

$2 \cdot \sin 45^0 \cdot \cos\left(2x - 45^0\right) = 1.2 / : 2\sin 45^0$

$\cos\left(2x - 45^0\right) = \dfrac{1.2}{2\sin 45^0} = 0.8485$

$\cos\left(2x - 45^0\right) = \cos\left(31.95^0\right)$

$2x - 45^0 = \pm 31.95^0 + 360^0 k$

$(1.)\quad 2x - 45^0 = 31.95^0 + 360^0 k \qquad (2.)\quad 2x - 45^0 = -31.95^0 + 360^0 k$

$2x = 76.95^0 + 360^0 k \qquad 2x = 13.05^0 + 360^0 k$

$\underline{x_1 = 38.475^0 + 180^0 k} \qquad \underline{x_2 = 6.525^0 + 180^0 k}$

7. משוואות הומוגניות ממעלה ראשונה ושנייה

משוואות טריגונומטריות הינן הומוגניות לגבי פונקציות סינוס וקוסינוס אם הן מופיעות באותה החזקה ובאותו המחזור.

למשל: $-3, 5, 1$ ו- $\sin x, \cos x$, ו- $\sin^2 x, \cos^2 x$.

באם הביטויים הללו יופיעו במשוואה, רק הם, או חלק מהם, אזי המשוואה תהיה הומוגנית מדרגה שניה.

דוגמאות: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$, $5=5\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha$.

אם המשוואה היא הומוגנית, מחלקים לצורך הפיתרון את כל המשוואה ב- $\cos x$ בחזקה הגבוהה ביותר.

חובה לבדוק אם הפיתרון של $\cos x = 0$ מהווה פתרון של המשוואה המקורית וזאת ע"י הצבה $x = 90^0$ במשוואה המקורית.

רק אם $x = 90^0$ לא מהווה פתרון של המשוואה המקורית מותר לחלק ב- $\cos x$ בחזקה הגבוהה ביותר כפי שצויין מעלה. אם $x = 90^0$ מקיים את המשוואה המקורית יש לפתור בדרך אחרת.

דוגמאות:

א.

$$\boxed{\sin 2x + 3\cos 2x = 0}$$
$$\sin 2x = -3\cos x \,/:\cos 2x$$
$$\tan 2x = -3$$
$$2x = -71.56^0 + 180^0 k$$
$$\underline{x = -35.78^0 + 90^0 k}$$

בדיקה: האם מותר לחלק? ←

$$\cos 2x = 0$$
$$2x = 90$$
$$x = 45$$
$$\sin 90 + 3\cos 90 \doteq^{?} 0$$
$$1 + 0 \neq 0$$
מותר לחלק

ב.

$$\boxed{\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 3\cos^2 x} \,/:\cos^2 x$$

$x = 90^0$ נבדוק אגבי 0s oc ז"א

$$\sin^2 90 + 2\cdot\sin 90\cdot\cos 90 \doteq^{?} 3\cos^2 90$$
$$1 + 0 \neq 0 \rightarrow$$ מותר לחלק

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x} = \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}$$
$$\tan^2 x + 2\tan x = 3$$
$$\tan x = t \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} t_1 = -3 \\ t_2 = 1 \end{matrix}$$
$$(1.)\quad \tan x = -3$$
$$\underline{x_1 = -71.56^0 + 180^0 k}$$
$$(2.)\quad \tan x = 1$$
$$\underline{x_2 = 45^0 + 180^0 k}$$

ג.

$$\boxed{1 - 3\cos^2 x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x} \,/:\cos^2 x$$

נבדוק: האם מותר לחלק

$$\cos x = 0 \rightarrow x = 90^0$$
$$1 - 3\cos^2 90 \doteq^{?} 2\cdot\sin 90\cdot\cos 90$$
$$1 + 0 \neq 0 \rightarrow$$ מותר לחלק

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 2\tan x$$
$$1 + \tan^2 x - 3 = 2\tan x$$
$$\tan x = t$$
$$1 + t^2 - 3 = 2t$$
$$t^2 - 2t - 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{matrix} t_1 = 2.232 \\ t_2 = -0.732 \end{matrix}$$
$$(1.)\quad \tan x = -0.732$$
$$\underline{x_1 = -36.2^0 + 180^0 k}$$
$$(2.)\quad \tan x = 2.732$$
$$\underline{x_2 = 69.89^0 + 180^0 k}$$

הזהויות בטריגונומטריה

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cot\alpha}$$
$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$
$$\operatorname{cosec}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(90-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(90-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(180^0-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(180^0-\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(180^0-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$
$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 2\sin^2\alpha-1$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$$
$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$$
$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

	30°	45°	60°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$