לינארית תרגול 10

27 בדצמבר 2020

1 מכפלה פנימית

בהינתן מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, מפכלה פנימית היא פונקציה $\langle\rangle : V^2 \to \mathbb{F}$ המקיימת:

- לינאריות ברכיב הראשון:

$$\langle v + \alpha u, w\rangle = \langle v, w\rangle + \alpha\langle u, w\rangle$$

- הרמיטיות (סימטריות מעל $\mathbb{R}$):

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$$

מעל הממשיים:

$$\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$$

- אי־שליליות:

$$\langle v, v\rangle \geq 0, \langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$$

- מסקנה משני הראשונים:

$$\langle v, u + \alpha w\rangle = \langle v, u\rangle + \overline{\alpha}\langle v, w\rangle$$

הדוגמא שראיתם היא למשל: ב־$\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ נגדיר:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{pmatrix}$$

לדוגמא:

1.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot i + 2 \cdot 0 = 0$$

2.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{i} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= -i(1 \cdot 1 + i \cdot 1 + 2 \cdot 1) = -i(3 + i) = 1 - 3i$$

3.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + (1+2i) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=0} + \overline{1+2i} \cdot \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=3+i} =$$

$$= 0 + (1-2i)(3+i) = 3 + i - 6i + 2 = 5 - 5i$$

4.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} + (1+2i) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + (1+2i) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + (1+2i) \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 + (1+2i)(1 \cdot 1 + 1 \cdot i + 1 \cdot 0) =$$

$$= (1+2i)(1+i) = 1+i+2i-2 = -1+3i$$

מכפלה פנימית נוספת: במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^{m\times n}$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר:

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$$

זו מכפלה פנימית:

- לינאריות:

$$\langle A+\alpha B, C\rangle = tr\left((A+\alpha B)C^t\right) = tr(AC^t+\alpha BC^t) = tr(AC^t)+tr(\alpha BC^t) =$$

$$= \langle A, C\rangle + \alpha\langle B, C\rangle$$

- סימטריות:

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^t) = tr\left(AB^t\right)^t = tr(BA^t) = \langle B, A\rangle$$

- אי שליליות הוכחנו בתרגיל כשלמדנו עקבה, עיינו שם.

לדוגמא:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 3+0 = 3$$

2 נורמה

מכפלה פנימית משרה לנו נורמה, שהיא פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

נורמה מקיימת את התכונות:

- אי שליליות

- $$\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$$

- $$\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$$

תרגילים:

1. חשבו את

$$\left\| \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1+i)(1-i) + (-1+i)(-1-i) + 2 \cdot 2} = \sqrt{2+2+4} = \sqrt{8}$$

2. יהיו $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. הוכיחו:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

במילים אחרות:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \leq n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

פתרון: נתחיל להתגלגל. נתבונן בוקטור

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

הנורמה שלו:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

ננסה להשתמש באי שוויון קושי־שוורץ:

$$|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$$

ומכאן:

$$|\langle v,u\rangle|^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|u\|^2$$

אצלנו ניקח

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

נשים לב:

$$|\langle v,u\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} v_k \cdot u_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|$$

ולכן:

$$|\langle v,u\rangle|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

בנוסף:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 1} = \sqrt{n} \Rightarrow \|v\|^2 = n$$

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

ולכן:

$$\|v\|^2 \cdot \|u\|^2 = n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

בסה"כ:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = |\langle v,u\rangle|^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 = n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

3 אורתוגונליות

- וקטורים u, v ייקראו אור' אם:

$$\langle u,v\rangle = 0$$

למשל:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot (-i) - i \cdot (-1) + 0 \cdot i = -i + i = 0$$

- בהינתן קבוצה $S \subset V$. וקטור $v \in V$ ייקרא אורתוגונלי ל־S אם:

$$\forall s \in S : \langle v, s \rangle = 0$$

- קבוצה S תיקרא אורתוגונלית אם:

$$\forall u \neq v \in S : \langle u, v \rangle = 0$$

תרגילים:

1. הוכיחו שהקבוצה אור':

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

כי ראינו הרגע:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle = 0$$

בנוסף ראינו לעיל:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

ולסיום

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot (-i) + i \cdot (-1) + 2 \cdot i = -i - i + 2i = 0$$

2. תהי $S = \{v, u, w\}$ כך ש־ $\langle v, u\rangle = 0, \langle u, w\rangle = 0$. הוכיחו או הפריכו: S אור'.
פתרון: ניקח

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

כהמשך לקודם קל לראות $\langle v, u\rangle = 0, \langle u, w\rangle = 0$, אך:

$$\langle v, w\rangle = 1 \cdot 2 - i \cdot 2i + 0 \cdot 0 = 4 \neq 0$$

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. הוכיחו: $R(A)^\perp = N(A)$
ניזכר:

$$R(A)^\perp = \left\{v \in \mathbb{R}^n : \forall i : \langle R_i(A)^t, v\rangle = 0\right\}$$

נוכיח את השיוויון ע"י הכלה דו כיוונית:
$\supset$: יהי $v \in N(A)$ נראה שהוא ניצב ל־$R(A)$:

$$v \in N(A) \iff Av = 0$$

לפי כפל שורה:

$$\forall i : R_i(Av) = R_i(A)v$$

ולפי השיוויון מקודם נקבל:

$$\forall i : R_i(A)v = 0$$

קיבלנו:

$$\forall i : \langle R_i(A)^t, v\rangle = R_i(A)v = 0$$

ולכן, כיון שניצב לכל שורה, הוא גם ניצב לכל צ"ל של השורות (משפט), ולכן ניצב ל־$R(A)$.
$\subset$: בכיוון ההפוך, יהי $v \in R(A)^\perp$ צ"ל ש־ $v \in N(A)$, כלומר: $Av = 0$. נחשב כל רכיב ורכיב ונראה שהוא 0:

$$\forall i : R_i(Av) = R_i(A)v = \langle R_i(A)^t, v\rangle \underset{v\in R(A)^\perp}{=} 0$$

הגדרה של מרחב ניצב לקבוצה מסויימת S:

$$S^\perp = \{v \in V : \forall s \in S \langle v, s\rangle = 0\}$$

ולכל קבוצה S מתקיים $S^\perp$ תת מרחב.