לינארית

1. תש"ף מועד א שאלה3: בהינתן בסיס או"נ $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, אז לכל $v \in V$ מתקיים:

$$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_n\rangle v_n$$

במילים: בהינתן ממ"פ עם בסיס או"נ B, אז כל וקטור בבסיס מתקבל כצ"ל של איברי הבסיס כאשר מקדמי הצירוף הם המכפלות הפנימיות של הוקטור עם וקטורי הבסיס.
נראה דוגמא: למשל ניקח את הבסיס

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

עכשיו נבדוק איך הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ מתקבל כצ"ל שלהם:

$$\left.\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{array}\right.$$

2. בהינתן מטריצה A, אז $C(A^n) \subset C(A)$. נתחיל מהטענה הבאה: $C(AB) \subset C(A)$.
הסבר: נראה שכל עמודה של AB היא צ"ל של עמודות A:

$$C_i(AB) = AC_i(B) = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} C_k(A)$$

במילים: העמודה ה־i של המטריצה AB, זה צ"ל של עמודות A כאשר המקדמים באים מהעמודה ה־i של B. בכך הוכחנו:

$$\forall i : C_i(AB) \in C(A)$$

כעת, בהינתן $v \in C(AB)$ אז לפי הגדרה v הוא צ"ל של עמודות AB, כיון שכל עמודה כזו היא איבר ב־$C(A)$, נקבל ש־v הוא צ"ל של וקטורים מ־$C(A)$, וכיון שתת מרחב סגור לצירופים לינאריים נקבל $v \in C(A)$.
מכאן אפשר להוכיח את הטענה המקורית. כי:

$$C(A^n) = C(AA^{n-1}) \subset C(A)$$

3. מתי לשים בשורות ומתי בעמודות? השאלה היא תמיד מה רוצים לבדוק.

(א) אם רוצים לבדוק אם יש תלות בין הוקטורים - אז אמליץ לשים בעמודות. כי אז פתרון לא טריוויאלי למערכת הנוצרת נותן לנות את הצ"ל השווה 0. לכן אם יש לנו מספר וקטורים כמימד המרחב ואנחנו רוצים לבדוק אם הם בת"ל (ובגלל זה בסיס) כדאי לשים בעמודות. לדוגמא, האם הוקטורים הבאים ת"ל או בת"ל, אם הם תלויים, מצאו צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שנותן את וקטור האפס.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

נבדוק אם יש פתרון לא טריוויאלי למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש פתרון לא טריוויאלי למערכת, ולכן הוקטורים תלויים, והפתרון נותן את הצירוף הרצוי:

$$N(A) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$$

אז למשל נשים לב שהצירוף:

$$-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז אמנם גם אם נשים את הוקטורים בשורות נוכל לדעת אם הם בת"ל או לא - אם התאפסה שורה הם ת"ל, ואם אף שורה לא התאפסה הם בת"ל. אך אם הם ת"ל, לא נוכל לדעת מה הצ"ל הלא טריוויאלי שלהם שנותן 0, ולפעמים רוצים לדעת...

(ב) אם נתונים לנו מספר וקטורים שפורשים מרחב כלשהו, ואנחנו מחפשים מתוכם בסיס (ורוצים לזרוק את הוקטורים התלויים) - אז אמליץ לשים בעמודות. כי אז נוכל לקחת את הוקטורים המקוריים המתאימים לעמודות ציר בצורה המדורגת של המטריצה שבנינו, והם מהווים בסיס.

(ג) אם נתונים לנו מס' וקטורים בת"ל ואנחנו רוצים להוסיף עליהם כדי להגיע לבסיס של מרחב כלשהו - אז אמליץ לשים בשורות. כי אז, כיון שמרחב השורות לא

מתקלקל בדירוג, נוכל בקלות לדעת אילו וקטורים כדאי להוסיף על הוקטורים המתקבלים בסוף תהליך הדירוג, והם "עובדים טוב" גם עם המקוריים כי מרחב השורות בסוף ובהתחלה הוא זהה.

4. תהי A מטריצה כך שבשורה מסויימת יש שורת אפסים, אז אין מספיק נתונים.

(א) אם המערכת הומוגנית אז: אם יש איבר חופשי יש אינסוף ואם אין אז פתרון יחיד.

(ב) אם המערכת לא הומוגנית אז: אם אותה שורת אפסים מובילה לסתירה אז אין פתרון, אם אין סתירה אז מספר הפתרונות תלוי באיבר חופשי כמו קודם.