תרגיל 3 בפונקציות מרוכבות

1. כתבו את הפונקציה הבאה באמצעות משתנה z (בלבד, בלי $\overline{z}$ או $|z|$ וכדומה).

$$x - \frac{x}{x^2+y^2} + i(y + \frac{y}{x^2+y^2})$$

2. הגדירו את הפונקציה

$$f(z) = (\frac{1}{z} - \frac{1}{2})\frac{1}{z-2}$$

בנקודה $z = 2$ כך שתהיה רציפה שם.

3. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z = 0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

(א) $\frac{\overline{z}}{z} - \frac{z}{\overline{z}}$

(ב) $\frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{\overline{z}}$

(ג) $\frac{\mathrm{Im}(z)}{\overline{z}}$

4. הוכיחו כי אם f גזירה ב z_0 אז היא רציפה ב z_0 (כמובן, ההוכחה זהה להוכחה באינפי).

5. הראו לפי הגדרה שהפונקציה $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ אינה גזירה בשום מקום (כלומר, לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ הנגזרת $f'(z_0)$ לא קיימת)