מבחן באנליזת פורייה ויישומים 88-235 מועד א' תשפ"ו

מרצה – ארז שיינר זמן המבחן – 3 שעות משקל כל שאלה: 27 נק'

<u>שאלה ראשונה</u>:

נביט בפונקציה $f(x) = x\sin(2x)$

א. מצאו את טור הפורייה של $f(x)$, מותר להשתמש בזהות הבא:

$$\sin(2x)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin\big((n+2)x\big) - \sin\big((n-2)x\big)\right]$$

ב. חשבו את הטור

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$$

ג. חשבו את הטור

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n^2-4)^2}$$

<u>שאלה שנייה</u>:

נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

א. חשבו את התמרת הפורייה $\mathcal{F}[f](s)$

ב. מצאו פונקציה $h(x)$ עבורה $\mathcal{F}[h](s) = \frac{\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)}{s^2}$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)}{s^2}\,ds$$

שאלה שלישית

נתון וקטור הדגימות $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1,2,1,0)$ של האות $f(t)$.
קצב הדגימה הוא 8 דגימות לשנייה, כלומר

$$a_p = f\left(\frac{p}{8}\right)$$

א. חשבו את הDFT של הוקטור.
ב. אילו תדרים פעילים באות לפי הDFT?
ג. מצאו $c \in \mathbb{R}$ כך שהדגימות לעיל זהות לדגימות של האות

$$g(t) = 1 + c\sin(12\,\pi t)$$

מה התופעה שזה מדגים?

שאלה רביעית

תהי f בעלת נגזרת רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, בעלת טור הפוריה

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

א. הוכיחו או הפריכו:

$$f(\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

ב. הוכיחו או הפריכו:

$$f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \overline{g}$$

מקדמי פורייה

$$a_n = \langle f, \cos(nx) \rangle, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \langle f, \sin(nx) \rangle, \qquad n \geq 1$$

טור הפורייה

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

משפט דיריכלה

תהי $f \in \mathbb{V}$ ותהי $x_0 \in \mathbb{R}$ כך שההמשך המחזורי $\tilde{f}$ בעל גבולות חד צדדיים סופיים בx_0 ובעל נגזרות חד צדדיות סופיות בx_0 אזי טור הפורייה מתכנס

$$\frac{\tilde{f}(x_0^+) + \tilde{f}(x_0^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)$$

בפרט אם $\tilde{f}$ רציפה בx_0 אזי הטור מתכנס ל $\tilde{f}(x_0)$.

משפט שיוויון פרסבל

לכל $f \in \mathbb{V}$ מתקיים כי

$$||f||^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

המקדמים של טור הקוסינוסים וטור הסינוסים

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

התמרת פורייה

הגדרה: תהי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ נגדיר את התמרת פורייה שלה להיות הפונקציה

$$F(s)=\mathcal{F}(f)(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}dx$$

תכונות של התמרת פורייה

$$\mathcal{F}(f_1+cf_2)=\mathcal{F}(f_1)+c\mathcal{F}(f_2)$$

$$\mathcal{F}(f')(s)=is\mathcal{F}(f)(s)$$

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f)(s)=-i\mathcal{F}\big(xf(x)\big)$$

משפט ההתמרה ההפוכה

משפט: תהי פונקציה f כך ש $\int_{-\infty}^{\infty}|f|$ מתכנס, אזי בכל נק' בה הנגזרות החד צדדיות קיימות וסופיות מתקיים כי

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\lim_{n\to\infty}\int_{-n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{F}(f)(s)e^{isx}ds$$

קונבולוציה

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

$$\mathcal{F}(f*g)=2\pi\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$$

תדרים

התדר של e^{-isx} הוא $\frac{|s|}{2\pi}$

התמרה בדידה

$$u_n(t) = e^{2\pi i \cdot n \cdot \frac{T}{N} t}$$

$$e_n = \left(u_n(0), u_n\left(\frac{1}{T}\right), \dots., u_n\left(\frac{N-1}{T}\right)\right) = \left(1, e^{2\pi i \cdot \frac{n}{N}}, \dots, e^{2\pi i \cdot \frac{n}{N} \cdot (N-1)}\right)$$

$$e_{N-n} = e_{-n}$$

תהי סדרה $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ נגדיר את התמרת הפורייה הבדידה שלה (*DFT*) להיות הסדרה $A_0, \dots, A_{N-1} \in \mathbb{C}$ ע"י

$$A_k = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \cdot e^{-2\pi i \cdot k \frac{p}{N}}$$

התמרה בדידה הפוכה

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} A_p e^{\frac{2\pi i p k}{N}}$$

עבור N אי זוגי הדגימות של הגלים

$$e_{-\frac{N-1}{2}}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{\frac{N-1}{2}}$$

מתאימות לטווח התדרים

$$\frac{N-1}{2} \cdot \frac{T}{N}, \dots, \frac{T}{N}, 0, \frac{T}{N}, \dots, \frac{N-1}{2} \cdot \frac{T}{N}$$

עבור N זוגי הדגימות של הגלים

$$e_{-\frac{N-2}{2}}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{\frac{N-2}{2}}, e_{\frac{N}{2}}$$

מתאימות לטווח התדרים

$$\frac{N-2}{2} \cdot \frac{T}{N}, \dots, \frac{T}{N}, 0, \frac{T}{N}, \dots, \frac{N-2}{2} \cdot \frac{T}{N}, \frac{N}{2} \cdot \frac{T}{N}$$

אות ממשי

בהינתן דגימות של אות ממשי אם X_k, X_{-k} הם ערכים ההתמרת פורייה הבדידה, יוצא שהאמפליטודה של הגל הממשי היא

$$\frac{2}{N} |X_k|$$

כמו כן, הזוית של X_k היא הפאזה של הגל!