① לכל $n=0,1,2,\dots$ נגדיר פונקציה $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ כך ש $T_n \in L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}[-1,1]$

א) הוכיחו כי $T_n(x)$ היא פולינום ממעלה n ב x.

ב) הוכיחו כי $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרה פולינומים אורתוגונלית ביחס למשקל $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ בקטע $[-1,1]$ (פולינומי Chebyshev).

ג) חשבו $\|T_n(x)\|$. מצאו את המקדם γ_n ב $T_n(x)=\gamma_n x^n+\dots+\gamma_0$.

ד) הוכיחו כי $T_n(x)$ הוא פתרון של המשוואה $\left(\sqrt{1-x^2}\,y'\right)'+n^2\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=0$

② יהי $C(\mathbb{R}^2)$ אלגברה של כל הפונקציות הרציפות $f(x,y)$ מ $\mathbb{R}^2$ ל $\mathbb{C}$. נגדיר $A=\{f\in C(\mathbb{R}^2)\mid f(x,y)=\overline{f(-x,y)}\}$

א) הוכיחו כי A היא תת אלגברה של $C(\mathbb{R}^2)$.

ב) הוכיחו כי A מפרידה נקודות ב $\mathbb{R}^2$.

ג) הוכיחו כי A אינה צפופה ב $C(\mathbb{R}^2)$.

③ הפולינומים של לז'נדר (Legendre) הם $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

א) הוכיחו כי $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$ מרחב $L^2[-1,1]$.

ב) חשבו את המקדם γ_n ב $P_n(x)=\gamma_n x^n+\dots+\gamma_0$.

ג) חשבו את הערכים $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-1)$.

④ הוכיחו כי פולינומי של יעקובי (Jacobi) $J_n(\alpha,\beta)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]$ אורתוגונלי ביחס למשקל $\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ עם $\alpha>-1,\beta>-1$.

⑤ הוכיחו כי פולינומי של לגר (Laguerre) $L_n(x)=e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ הם אורתוגונליים עם משקל $\rho(x)=e^{-x}$ על קטע $[0,+\infty)$.

⑥ הוכיחו כי פולינומים של הרמיט (Hermit) $H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ אורתוגונליים עם משקל $\rho(x)=e^{-x^2}$ על קטע $(-\infty,+\infty)$.