פתרון תרגיל 1 - לינארית 2 - תמורות ודטרמיננטה

שאלה 1. מצאו את כל התמורות בS_4. כתבו כל תמורה בשתי ההצגות שלמדנו.

פתרון.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=(3\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}=(2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=(2\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=(2\ 3\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=(2\ 4\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=(1\ 3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=(1\ 3\ 4)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}=(1\ 4\ 3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}=(1\ 2) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}=(1\ 4\ 2)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=(1\ 2)(3\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=(1\ 2\ 4\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 4\ 2) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2\ 4) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=(1\ 4\ 3\ 2)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 4\ 2\ 3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 4)(2\ 3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3)(2\ 4)$$

שאלה 2. יהיו $\sigma=(1\ 2\ 6\ 4)\,,\tau=(5\ 6\ 1\ 3)$ תמורות בS_6.

1. חשבו במפורש את $\sigma\circ\tau$ בשתי ההצגות.
2. מצאו את הסימן של $\sigma\circ\tau$.

פתרון.

1.

$$\sigma\circ\tau=(1\ 2\ 6\ 4)(5\ 6\ 1\ 3)=(1\ 3\ 5\ 4)(2\ 6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&5&1&4&2\end{pmatrix}$$

2. לפי סעיף 1, ניתן לחשב את כמות החיתוכים בהצגה של מטריצה, ולקבל שיש מספר זוגי של חיתוכים, ולכן הסימן הוא 1.

דרך נוספת, היא לחשב ישירות מσ וτ

$$sign\,(\sigma\circ\tau)=sign\,(\sigma)\,sign\,(\tau)=(-1)^{4-1}(-1)^{4-1}=(-1)(-1)=1$$

שאלה 3. נתנות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

חשבו את $\det(A), \det(B)$ לפי תמורות.

פתרון.

$$\det(A) = 1 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = -2$$

$$\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 4 + 2 - 6 - 12 = -12$$