חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

הגדרות, טענות ומשפטים

ד״ר ארז שיינר

טיוטה 1

איך לקרוא את הקובץ. הקובץ משמש את הקורסים 83–114 (חדו״א 2 להנדסה) ו־86–148 (מתמטיקה לפיזיקאים 2, אודיסאה). כל פריט ממוספר לפי הסעיף שבו הוא נמצא: הגדרה 2.2.3 היא הפריט השלישי בסעיף 2.2. משפטים, טענות, למות ומסקנות עומדים על רקע אפור עם קו שחור בצד ימין; הגדרות, סימונים ושיטות עומדים על רקע אפור בהיר, בלי קו. הערות ועקרונות עבודה מופיעים במסגרת, בלי מספר. כל פריט מנוסח במדויק; אחרי הניסוח המדויק מופיע לפעמים גם ניסוח מילולי (במילים:). בשוליים, ליד כל פריט: סרטון פותח סרטון בדיוק ברגע שבו הפריט נאמר, ו־הוכחה בסרטון פותח סרטון ברגע שבו מתחילה ההוכחה. הקישור הוא לסרטון הקצר של הלוח הירוק בשיש בזה שמתאים לחומר של הקורס, ואחרת להקלטת ההרצאה (סמסטר ב׳ תשפ״ו; בביתת ההנדסה, ובביתת אודיסאה בשהפריט לא נאמר בהנדסה).

תוכן העניינים

1 טורים **3**

1.1 מבוא והגדרה 3

1.2 טורים חיוביים 4

1.3 טורים כלליים 6

2 סדרות וטורי פונקציות **8**

2.1 פונקציית הגבול 8

2.2 התכנסות במידה שווה 8

2.3 רציפות, אינטגרל ונגזרת של הגבול 9

2.4 טורי פונקציות 10

3 טורי חזקות וטורי טיילור **12**

3.1 טורי טיילור וטורי חזקות 12

3.2 רדיוס ההתכנסות 13

3.3 התכנסות במידה שווה של טורי חזקות 14

4 גבולות ורציפות בשני משתנים **15**

4.1 גבול ורציפות 15

5 גזירות בשני משתנים **18**

5.1 דיפרנציאביליות ונגזרות חלקיות 18

5.2 נגזרת כיוונית וגרדיאנט 20

5.3 כלל השרשרת וקווי גובה 21

5.4 פולינום טיילור בשני משתנים 22

6 קיצון בשני משתנים **24**

6.1 קיצון מקומי 24

6.2 קיצון מוחלט 25

7 אינטגרלים כפולים ומשולשים **28**

7.1 אינטגרל כפול ומשפט פוביני 28

7.2 תחום סטנדרטי 29

7.3 שינוי קואורדינטות 30

7.4 אינטגרל משולש 32

8 אינטגרלים קוויים ומשפט גרין **34**

8.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון 34

8.2 אינטגרל קווי מסוג שני 35

8.3 שדה משמר 36

8.4 משפט גרין 37

9 אינטגרלים משטחיים, משפט גאוס ומשפט סטוקס **38**

9.1 אינטגרלים משטחיים 38

9.2 משפט גאוס ומשפט סטוקס 39

1 טורים

1.1 מבוא והגדרה

הגדרה 1.1.1 סדרת הסכומים החלקיים (סס"ח)

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית.

סדרת הסכומים החלקיים (סס"ח בקיצור) של a_n היא הסדרה S_n המוגדרת ע"י:

- $S_1 = a_1$;
- לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.

בלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

הגדרה 1.1.2 טור; סכום טור; טור מתכנס / מתבדר

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית, ותהי $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ סדרת הסכומים החלקיים שלה.

- יהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. אומרים כי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$ (**סכום הטור** הוא L) אם $\lim_{n\to\infty} S_n = L$.
- אם לסדרה S_n יש גבול סופי, אומרים כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס**.
- אם לסדרה S_n אין גבול סופי, אומרים כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתבדר**.
- יהי $m \in \mathbb{Z}$. לטור $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$, שאיבריו a_k מוגדרים לכל שלם $k \geq m$, ההגדרות זהות, עם הסכומים החלקיים $\sum_{k=m}^{n} a_k$ עבור $n \geq m$.

בלומר, כאשר לסדרה S_n יש גבול (סופי או אינסופי), מתקיים

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

משפט 1.1.3

סרטון

הוכחה בסרטון

הטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתבדר, וסדרת הסכומים החלקיים שלו שואפת לאינסוף, בלומר $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

הגדרה 1.1.4 הטור ההנדסי

סרטון

יהי $x \in \mathbb{R}$. **הטור ההנדסי** עם המנה x הוא הטור $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

משפט 1.1.5

סרטון

הוכחה בסרטון

יהי $x \in \mathbb{R}$. אזי הטור $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ מתכנס אם ורק אם $|x| < 1$, ובמקרה זה מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

משפט 1.1.6 תנאי הכרחי להתכנסות טור

תהי a_n סדרה ממשית. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי $a_n \to 0$.

סרטון

הוכחה בסרטון

מסקנה 1.1.7

תהי a_n סדרה ממשית. אם $a_n \not\to 0$, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר.

סרטון

טענה 1.1.8

תהי a_n סדרה ממשית. אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ מתכנס, ובמקרה זה

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k.$$

סרטון

מסקנה 1.1.9

תהיינה a_n, b_n סדרות ממשיות, ונניח שקיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש $b_n = a_n$ לכל $n > K$. אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס, ובמקרה זה

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{K} (a_k - b_k).$$

במילים: שינוי מספר סופי של איברי הטור אינו משפיע על התכנסותו, אבל **כן משפיע** על סכום הטור.

סרטון

טענה 1.1.10 חשבון טורים

תהיינה a_n, b_n סדרות ממשיות ויהי $c \in \mathbb{R}$.

(א) אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

(ב) אם הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ו־$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנסים, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

סרטון

1.2 טורים חיוביים

הגדרה 1.2.1 טור חיובי

תהי a_n סדרה ממשית. הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא **טור חיובי** אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq 0$.

סרטון

טענה 1.2.2

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי a_n סדרה ממשית כך ש $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

תהי $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ סדרת הסכומים החלקיים שלה. אזי:

- הסדרה S_n מונוטונית עולה;
- הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם ורק אם הסדרה S_n חסומה;
- אם הסדרה S_n אינה חסומה, אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

משפט 1.2.3 מבחן ההשוואה הראשון

סרטון
הוכחה בסרטון

תהיינה a_n, b_n סדרות ממשיות כך ש $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

מסקנה 1.2.4

סרטון

תהיינה a_n, b_n סדרות ממשיות כך ש $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

הגדרה 1.2.5 טורים "חברים"

סרטון

תהיינה a_n, b_n סדרות ממשיות. הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ו־$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ נקראים **חברים** אם שניהם מתכנסים או שניהם מתבדרים, כלומר $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס.

משפט 1.2.6 מבחן ההשוואה הגבולי

סרטון
הוכחה בסרטון

תהיינה a_n, b_n סדרות ממשיות כך ש $a_n \geq 0$ ו־$b_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

יהי $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש $\frac{a_n}{b_n} \to c$.

(א) אם $c = \infty$, אזי קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n > b_n$ לכל $n > K$, ולכן: אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס.

(ב) אם $c = 0$, אזי קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n < b_n$ לכל $n > K$, ולכן: אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

(ג) אם $0 < c < \infty$, אזי הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ו־$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **חברים**, כלומר הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס.

משפט 1.2.7

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי a_n סדרה ממשית. אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס, אזי גם הטור המקורי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

הגדרה 1.2.8 מתכנס בהחלט / מתכנס בתנאי / מתבדר

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית.

- הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא **מתכנס בהחלט** אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס וגם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס.
- הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא **מתכנס בתנאי** אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אך $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר.
- הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא **מתבדר** אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר וגם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר.

משפט 1.2.9 מבחן השורש

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית (הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ אינו חייב להיות חיובי), ויהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$.

סרטון הוכחה בסרטון

(א) אם $L < 1$, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס בהחלט**.

(ב) אם $L > 1$ (כולל $L = \infty$), אזי $a_n \not\to 0$, ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתבדר**.

משפט 1.2.10 מבחן המנה

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית, ויהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L$.

סרטון הוכחה בסרטון

(א) אם $L < 1$, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס בהחלט**.

(ב) אם $L > 1$ (כולל $L = \infty$), אזי $a_n \not\to 0$, ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתבדר**.

הערה: להעשרה

סרטון

מבחן השורש ומבחן המנה בגרסה החזקה ביותר שלהם משתמשים בגבול העליון ($\limsup$; במבחן המנה גם בגבול התחתון, $\liminf$) במקום בגבול, ואלה לא נלמדו בקורס. מי שרוצה יכול לראות את הגרסה הזו, עם ההוכחות, בסרטון של הלוח הירוק. היא אינה בחומר הקורס.

הגדרה 1.2.11 התכנסות של אינטגרל לא אמיתי

סרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,t]$ לכל $t > a$. נגדיר

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

כאשר הגבול קיים, סופי או אינסופי. אם הגבול קיים וסופי, אומרים שהאינטגרל $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ **מתכנס**, ואחרת אומרים שהוא **מתבדר**.

משפט 1.2.12 מבחן האינטגרל

סרטון

תהי f פונקציה רציפה ויורדת בקרן $[1,\infty)$, כך ש $f(x) \geq 0$ לכל $x \geq 1$. אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

סרטון הוכחה בסרטון

משפט 1.2.13 הטור ההרמוני המוכלל

סרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$. אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

סרטון הוכחה בסרטון

1.3 טורים כלליים

משפט 1.3.1 מבחן לייבניץ

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית **מונוטונית** יורדת כך ש $a_n \to 0$. אזי:

סרטון הוכחה בסרטון

- הטור $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ מתכנס;
- $\left|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k\right| \leq a_1$.

שיטה 1.3.2 סדר פעולות לבדיקת טור

סרטון

תהי a_n סדרה ממשית. כדי לקבוע אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

(א) אם $a_n \not\to 0$, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר.

(ב) מפעילים על טור הערכים המוחלטים $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, שהוא טור חיובי, את חמשת המבחנים לטורים חיוביים ("מבחני ספוק"): מבחן ההשוואה הראשון, מבחן ההשוואה הגבולי, מבחן השורש, מבחן המנה ומבחן האינטגרל. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בהחלט.

(ג) אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר, בודקים את הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ עצמו, במבחן לייבניץ או לפי ההגדרה (גבול הסס"ח). אם הוא מתכנס, אזי הוא מתכנס בתנאי; אחרת הוא מתבדר.

2 סדרות וטורי פונקציות

2.1 פונקציית הגבול

הגדרה 2.1.1 פונקציית הגבול; התכנסות נקודתית

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, ותהי f_n סדרת פונקציות המוגדרות ב־A, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ הפונקציה f_n מוגדרת ב־A.

- **פונקציית הגבול** של f_n היא הפונקציה f המוגדרת בכל נקודה $x \in A$ שבה לסדרה הממשית $f_n(x)$ יש גבול סופי, ע"י

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

  בנקודה $x \in A$ שבה לסדרה $f_n(x)$ אין גבול סופי, f אינה מוגדרת.
- תחום ההגדרה של f, כלומר קבוצת הנקודות $x \in A$ שבהן לסדרה $f_n(x)$ יש גבול סופי, נקרא **תחום ההתכנסות** של f_n.
- תהי $B \subseteq A$. אומרים ש f_n **מתכנסת נקודתית** ב־B לפונקציית הגבול f, ומסמנים $f_n \to f$ ב־B, אם B מוכלת בתחום ההתכנסות של f_n, כלומר אם לכל $x \in B$ מתקיים $f_n(x) \to f(x)$.

במילים: מציבים את x כפרמטר קבוע, ומחשבים את הגבול של סדרת המספרים שהתקבלה.

הגדרה 2.1.2 פונקציית הגבול של טור פונקציות

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, ותהיינה $f_0, f_1, f_2, \ldots$ פונקציות המוגדרות ב־A. **סדרת הסכומים החלקיים** של טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ היא סדרת הפונקציות $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, ו**פונקציית הגבול** של הטור היא פונקציית הגבול של S_n: היא מוגדרת בכל נקודה $x \in A$ שבה הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס, ע"י

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

תחום ההגדרה של f נקרא **תחום ההתכנסות** של הטור.

2.2 התכנסות במידה שווה

הגדרה 2.2.1 התכנסות במידה שווה לפי קושי

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, ותהי f_n סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ב־A לפונקציית הגבול f. אומרים ש f_n **מתכנסת במידה שווה** (בקיצור **במ"ש**) ל־f ב־A, ומסמנים $f_n \rightrightarrows f$ ב־A, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > K$ ולכל $x \in A$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \in \mathbb{N} \;\; \forall n > K \;\; \forall x \in A : \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

במילים: לכל עובי של "צינור" סביב הגרף של f, החל ממקום מסוים כל הפונקציות בסדרה נמצאות בתוך הצינור בכל התחום A.

הגדרה 2.2.2 סדרת החסמים

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה, ותהי f_n סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ב־A לפונקציית הגבול f. **סדרת החסמים** של f_n ב־A היא הסדרה

$$d_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|,$$

באשר $d_n = \infty$ אם $|f_n - f|$ אינה חסומה מלעיל ב־A.

במילים: d_n הוא הרדיוס של ה"צינור" הצר ביותר סביב הגרף של f שבתוכו נמצא הגרף של f_n בכל התחום A.

הגדרה 2.2.3 התכנסות במידה שווה לפי היינה

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה, ותהי f_n סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ב־A לפונקציית הגבול f, עם סדרת החסמים d_n. אומרים ש f_n **מתכנסת במידה שווה** ל־f ב־A, ומסמנים $f_n \rightrightarrows f$ ב־A, אם $d_n \to 0$.

טענה 2.2.4

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה, ותהי f_n סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ב־A לפונקציית הגבול f. אזי f_n מתכנסת במ"ש ל־f ב־A לפי קושי אם ורק אם f_n מתכנסת במ"ש ל־f ב־A לפי היינה.

שיטה 2.2.5 בדיקת התכנסות במידה שווה

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה, ותהי f_n סדרת פונקציות המוגדרות ב־A. בודקים אם f_n מתכנסת במ"ש ב־A בשלושה שלבים:

(א) מחשבים את פונקציית הגבול $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. בשלב זה x קבוע ו־$n \to \infty$.

(ב) מחשבים את סדרת החסמים $d_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$. בשלב זה n קבוע ו־x נע ב־A.

(ג) בודקים אם $d_n \to 0$ (כאן כבר לא מופיע x): f_n מתכנסת במ"ש ל־f ב־A אם ורק אם $d_n \to 0$.

עקרונות לחישוב סדרת החסמים

סרטון

- את d_n מוצאים תמיד בחקירה של $f_n - f$ בתחום A (באשר n קבוע). לא מציבים פשוט את קצוות התחום ומקווים ששם החסם העליון. אם $f_n - f$ מונוטונית בתחום (וזה שלב של חקירה), אפשר להסתכל בקצוות.
- אם בחישוב יצא $d_n = 0$, סימן שטעיתם: $d_n = 0$ רק באשר $f_n(x) = f(x)$ לכל $x \in A$.

2.3 רציפות, אינטגרל ונגזרת של הגבול

משפט 2.3.1

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f_n סדרת פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ המתכנסת במ"ש ב־$[a,b]$ לפונקציית הגבול f. אזי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

מסקנה 2.3.2

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f_n סדרת פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ המתכנסת נקודתית ב־$[a,b]$ לפונקציית הגבול f. אם f אינה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אזי f_n אינה מתכנסת במ"ש ל־f ב־$[a,b]$.

משפט 2.3.3

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f_n סדרת פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ המתכנסת במ"ש ב־$[a,b]$ לפונקציית הגבול f. אזי

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

עיקרון: תרשימי הזרימה

סרטון

התכנסות במ"ש של f_n אינה מבטיחה דבר על הנגזרות f_n': בתוך ה"צינור" יש מספיק מקום להתפרע. אם הלמעלה מתכנס במ"ש, אסור לרדת למטה:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \rightrightarrows & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_n' & \overset{?}{\to} & f' \end{array}$$

אבל אם הלמטה מתכנס במ"ש, מותר לחזור למעלה (בתנאים של המשפט הבא):

$$\begin{array}{ccc} f_n & \to & f \\ \uparrow & & \uparrow \\ f_n' & \rightrightarrows & f' \end{array}$$

משפט 2.3.4

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי f_n סדרת פונקציות כך שהסדרה $f_n(a)$ מתכנסת, הנגזרות f_n' רציפות בקטע הסגור $[a,b]$, וסדרת הנגזרות f_n' מתכנסת במ"ש ב־$[a,b]$ לפונקציית הגבול שלה g. אזי:

- f_n מתכנסת נקודתית ב־$[a,b]$ לפונקציית הגבול שלה f;
- f גזירה בכל נקודה $x \in (a,b)$, ומתקיים $f'(x) = g(x)$.

2.4 טורי פונקציות

הגדרה 2.4.1 התכנסות במידה שווה של טור פונקציות

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, ותהיינה $f_0, f_1, f_2, \ldots$ פונקציות. אומרים שטור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **מתכנס במ"ש** ב־A אם סדרת הסכומים החלקיים שלו, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, מתכנסת במ"ש ב־$A$ לפונקציית הגבול שלה.

מסקנה 2.4.2

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהיינה $f_0, f_1, f_2, \ldots$ פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ כך שטור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב־$[a,b]$. אזי פונקציית הגבול של הטור, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

מסקנה 2.4.3 אינטגרציה איבר־איבר

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהיינה $f_0, f_1, f_2, \ldots$ פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ כך שטור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב־$[a,b]$. אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ מתכנס, ומתקיים

סרטון הוכחה בסרטון

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big)dx.$$

מסקנה 2.4.4 גזירה איבר־איבר

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהיינה $f_0, f_1, f_2, \ldots$ פונקציות כך שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ מתכנס, הנגזרות f_n' רציפות בקטע הסגור $[a,b]$, וטור הנגזרות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב־$[a,b]$. אזי:

- הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לכל $x \in [a,b]$;
- פונקציית הגבול שלו גזירה בכל נקודה $x \in (a,b)$, ומתקיים

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

3 טורי חזקות וטורי טיילור

3.1 טורי טיילור וטורי חזקות

הגדרה 3.1.1 טור טיילור

סרטון

יהי $a \in \mathbb{R}$, ותהי f פונקציה גזירה אינסוף פעמים ב־a, כלומר הנגזרת $f^{(n)}(a)$ קיימת לכל $n \in \mathbb{N}$. **טור הטיילור** של f סביב a הוא טור הפונקציות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

כאשר $f^{(0)} = f$.

במילים: טור הטיילור הוא "פולינום אינסופי" שהמקדמים שלו הם מקדמי טיילור: הסכומים החלקיים שלו הם פולינומי טיילור של f סביב a.

הגדרה 3.1.2 טור חזקות

סרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית ויהי $a \in \mathbb{R}$. טור הפונקציות

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

נקרא **טור חזקות** סביב a.

משפט 3.1.3

סרטון

הוכחה בסרטון

לכל $x \in \mathbb{R}$ טור הטיילור של e^x סביב 0 מתכנס ל־e^x, כלומר

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

טענה 3.1.4

סרטון

הוכחה בסרטון

לכל $x \in \mathbb{R}$ טורי הטיילור של $\sin x$ ושל $\cos x$ סביב 0 מתכנסים ל־$\sin x$ ול־$\cos x$, כלומר

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

שיטה 3.1.5 הצבה בטור ידוע

סרטון

תהי $I \subseteq \mathbb{R}$, תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, ותהי g פונקציה כך ש $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ לכל $t \in I$. תהי h פונקציה. מציבים $t = h(x)$, ומקבלים שלכל x בתחום ההגדרה של h המקיים $h(x) \in I$ מתקיים

$$g\big(h(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(h(x)\big)^n.$$

3.2 רדיוס ההתכנסות

טענה 3.2.1

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ונניח שטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x-a| < |x_0-a|$:

- טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס בהחלט;
- טור הנגזרות שלו, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$, מתכנס בהחלט;
- טור האינטגרלים שלו, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, מתכנס בהחלט.

הגדרה 3.2.2 רדיוס ההתכנסות

סרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית ויהי $a \in \mathbb{R}$. **רדיוס ההתכנסות** R של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ הוא החסם העליון של קבוצת המרחקים $|x-a|$ עבור $x \in \mathbb{R}$ שבהם הטור מתכנס. אם קבוצה זו אינה חסומה מלעיל, $R = \infty$.

מסקנה 3.2.3

סרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ויהי R רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x-a| < R$ מתכנסים בהחלט טור החזקות, טור הנגזרות שלו וטור האינטגרלים שלו.

מסקנה 3.2.4

סרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ויהי R רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. אזי R הוא גם רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$.

טענה 3.2.5

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ויהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to L$. אזי רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ הוא L.

טענה 3.2.6

סרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, תהי $b_0, b_1, b_2, \ldots$ סדרה עולה ממש של מספרים שלמים אי-שליליים, יהי $a \in \mathbb{R}$, ויהי $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כך ש $\sqrt[b_n]{|a_n|} \to L$. אזי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^{b_n}$, כלומר החסם העליון של המרחקים $|x-a|$ עבור $x \in \mathbb{R}$ שבהם הטור מתכנס, הוא $\frac{1}{L}$, כאשר $\frac{1}{0} = \infty$ ו־$\frac{1}{\infty} = 0$.

שיטה 3.2.7 תחום ההתכנסות של טור חזקות

סרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ויהי R רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. את תחום ההתכנסות של הטור מוצאים כך:

- בכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x-a| < R$ הטור מתכנס בהחלט;
- בכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x-a| > R$ הטור מתבדר;
- אם $0 < R < \infty$, מציבים את שני הקצוות $x = a - R$ ו־$x = a + R$, ובודקים את התכנסות טורי המספרים שמתקבלים בעזרת מבחני ההתכנסות.

3.3 התכנסות במידה שווה של טורי חזקות

משפט 3.3.1 מבחן ה־M של ויירשטראס

סרטון

סרטון הוכחה בסרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה, ותהיינה $f_0, f_1, f_2, \ldots$ פונקציות המוגדרות ב־A. לכל שלם $n \geq 0$ יהי $M_n = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$, כאשר $M_n = \infty$ אם $|f_n|$ אינה חסומה מלעיל ב־A. אם טור המספרים $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ מתכנס, אזי טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב־A.

משפט 3.3.2

סרטון

סרטון הוכחה בסרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ונניח שרדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מקיים $R > 0$. יהי r מספר ממשי כך ש $0 < r < R$. אזי טור החזקות מתכנס במ"ש בקטע $[a-r, a+r]$.

מסקנה 3.3.3 גזירה ואינטגרציה איבר־איבר של טור חזקות

סרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ונניח שרדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מקיים $R > 0$. תהי f פונקציית הגבול של טור החזקות. אזי:

(א) לכל מספר ממשי r כך ש $0 < r < R$, טור הנגזרות וטור האינטגרלים של טור החזקות מתכנסים במ"ש בקטע $[a-r, a+r]$.

(ב) לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x-a| < R$, הפונקציה f גזירה ב־x ומתקיים

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

(ג) לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x-a| < R$ מתקיים

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

טענה 3.3.4

סרטון

סרטון הוכחה בסרטון

תהי $a_0, a_1, a_2, \ldots$ סדרה ממשית, יהי $a \in \mathbb{R}$, ונניח שרדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מקיים $R > 0$. תהי f פונקציה המקיימת $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $|x-a| < R$. אזי f גזירה אינסוף פעמים ב־a, ולכל שלם $n \geq 0$ מתקיים

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

בלומר, טור החזקות הוא טור הטיילור של f סביב a.

4 גבולות ורציפות בשני משתנים

בפרקים 4, 5 ו־6 הפונקציות הן פונקציות של שני משתנים, $f(x,y)$, המוגדרות בתת־קבוצה של $\mathbb{R}^2$.

4.1 גבול ורציפות

הגדרה 4.1.1 סביבה של נקודה במישור

סרטון

תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

- לכל וקטור $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ מסמנים $\|(a,b)\|=\sqrt{a^2+b^2}$ (**האורך** של הווקטור). **המרחק** בין נקודה $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ לבין הנקודה (x_0,y_0) הוא
$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$
- יהי $\delta>0$. העיגול הפתוח שמרכזו (x_0,y_0) ורדיוסו δ,
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\},$$
נקרא **סביבה של** (x_0,y_0).
- יהי $\delta>0$. העיגול הפתוח שמרכזו (x_0,y_0) ורדיוסו δ, בלי המרכז (x_0,y_0),
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\},$$
נקרא **סביבה מנוקבת של** (x_0,y_0).

הגדרה 4.1.2 גבול לפי קושי

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ויהי $L\in\mathbb{R}$. אומרים ש L הוא **הגבול** של f כאשר (x,y) שואף ל־(x_0,y_0), ומסמנים $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ המקיים $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ מתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

במילים: לכל סביבה של L בטווח קיימת סביבה מנוקבת של (x_0,y_0) בתחום, כך ש f מעבירה כל נקודה שלה לסביבה של L.

הגדרה 4.1.3 גבול לפי היינה

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ויהי $L\in\mathbb{R}$. אומרים ש L הוא הגבול של f באשר (x,y) שואף ל־(x_0,y_0) **לפי היינה** אם לכל זוג סדרות ממשיות a_n, b_n המקיימות $(a_n,b_n)\neq(x_0,y_0)$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\to x_0$ ו־$b_n\to y_0$, מתקיים $f(a_n,b_n)\to L$.

משפט 4.1.4 שקילות הגדרות קושי והיינה

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ויהי $L\in\mathbb{R}$. אזי $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$ לפי קושי אם ורק אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$ לפי היינה.

הגדרה 4.1.5 מסלול שמגיע לנקודה

תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. **מסלול שמגיע ל־**(x_0,y_0) הוא זוג פונקציות $x(t)$, $y(t)$ המוגדרות בקטע $(0,a)$ עבור $a>0$ כלשהו, כך ש $(x(t),y(t))\neq(x_0,y_0)$ לכל $t\in(0,a)$, ו־$x(t)\to x_0$, $y(t)\to y_0$ כאשר $t\to 0^+$.

מסקנה 4.1.6 גבול לפי מסלולים

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ויהי $L\in\mathbb{R}$. אזי $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$ אם ורק אם לכל מסלול $(x(t),y(t))$ שמגיע ל־(x_0,y_0) מתקיים

$$\lim_{t\to0^+}f\big(x(t),y(t)\big)=L.$$

מסקנה 4.1.7

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. נניח ש $(x_1(t),y_1(t))$ ו־$(x_2(t),y_2(t))$ הם מסלולים שמגיעים ל־(x_0,y_0) (הגדרה 4.1.5), ושקיימים $L_1,L_2\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ כך ש $L_1\neq L_2$ ומתקיים

$$\lim_{t\to0^+}f\big(x_1(t),y_1(t)\big)=L_1,\qquad\lim_{t\to0^+}f\big(x_2(t),y_2(t)\big)=L_2.$$

אזי לא קיים $L\in\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$.

הגדרה 4.1.8 רציפות בנקודה

סרטון

תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ותהי $f(x,y)$ פונקציה. אומרים ש f **רציפה בנקודה** (x_0,y_0) אם

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

במילים: הפונקציה מגיעה בנקודה (x_0,y_0) לערך שאליו היא שואפת: אין בה "ניתוק" ב־(x_0,y_0). מההגדרה נובע ש f מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0).

שיטה 4.1.9 הוכחת קיום גבול והפרכתו

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

- **הפרכה.** כדי להראות של־f אין גבול בנקודה (x_0,y_0), מוצאים שני מסלולים שמגיעים ל־(x_0,y_0), שלאורכם f שואפת לגבולות שונים (מסקנה 4.1.7).
- **הוכחה.** כדי להוכיח ש $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$, עבור $L\in\mathbb{R}$, משתמשים ב"חצי סנדוויץ' על הרצפה" עם $|f(x,y)-L|$: מוצאים סביבה מנוקבת U של (x_0,y_0) ופונקציה $g(x,y)$ כך ש $|f(x,y)-L|\le g(x,y)$ לכל $(x,y)\in U$ ו־$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)=0$. אזי $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$.

הערה: מסלולים ישרים אינם מספיקים

סרטון

ייתכן שלאורך כל ישר שעובר בנקודה (x_0,y_0) פונקציה $f(x,y)$ שואפת לאותו ערך, ועדיין אין לה גבול בנקודה (x_0,y_0).

הערה: שינוי קואורדינטות

סרטון

יש דרך שלישית לטפל בגבולות, שינוי לקואורדינטות קוטביות: $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$, ו־$r \to 0^+$ במקום $(x,y) \to (x_0,y_0)$. בקורס היא לא מוצגת, וברוב המקרים שתי הדרכים שבשיטה 4.1.9 עובדות. מי שמשתמש בה צריך חסם שתלוי ב־r בלבד: אם קיימים $a > 0$ ופונקציה $g(r)$ כך ש $|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - L| \le g(r)$ לכל $0 < r < a$ ולכל θ, ו־$g(r) \to 0$ כאשר $r \to 0^+$, אזי $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$. לא מספיק שלכל θ קבוע מתקיים $f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \to L$: אלה רק המסלולים הישרים.

5 גזירות בשני משתנים

5.1 דיפרנציאביליות ונגזרות חלקיות

הגדרה 5.1.1 השיפוע בין שתי נקודות בגרף

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, ותהיינה (x_0,y_0) ו־(x_1,y_1) נקודות שונות בתחום ההגדרה של f. **השיפוע** בגרף של f מהנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ אל הנקודה $(x_1,y_1,f(x_1,y_1))$, או בקיצור השיפוע של f מ־(x_0,y_0) אל (x_1,y_1), הוא

$$\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}.$$

במילים: השיפוע הוא היחס בין השינוי בטווח (בערך הפונקציה) לבין המרחק בתחום.

טענה 5.1.2

סרטון

הוכחה בסרטון

יהיו $A,B,C\in\mathbb{R}$ ותהי $g(x,y)=Ax+By+C$, שהגרף שלה הוא המישור $z=Ax+By+C$. תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, יהי $\hat{v}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ וקטור כך ש $\hat{v}\neq(0,0)$, ויהי $t>0$. אזי השיפוע של g מ־(x_0,y_0) אל $(x_0,y_0)+t\hat{v}$ הוא

$$\frac{Ah_1+Bh_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=(A,B)\cdot\frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}.$$

במילים: השיפוע של מישור תלוי רק בכיוון שבו הולכים: הוא אינו תלוי בנקודה (x_0,y_0), במרחק t ובאורך של $\hat{v}$.

הגדרה 5.1.3 פונקציה דיפרנציאבילית (גזירה) בנקודה

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. אומרים ש f **דיפרנציאבילית** (**גזירה**) בנקודה (x_0,y_0) אם קיים מישור $g(x,y)=Ax+By+C$, כאשר $A,B,C\in\mathbb{R}$, כך שההפרש בין השיפוע של f לבין השיפוע של g מ־(x_0,y_0) אל (x_0+h_1,y_0+h_2) שואף ל־0 כאשר $(h_1,h_2)\to(0,0)$:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left(\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-\frac{g(x_0+h_1,y_0+h_2)-g(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)=0$$

בלומר

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-Ah_1-Bh_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

במילים: מקרוב, f נראית כמו מישור: בכל כיוון, שיפועי המיתרים של f מתקרבים לשיפועי המיתרים של המישור g.

הערה: דיפרנציאביליות של צירופים של פונקציות אלמנטריות

סרטון

כמו בחדו"א 1, **הפונקציות האלמנטריות** הן $\sin$, $\cos$, a^x (עבור $a>0$ כך ש $a\neq 1$) ו־x^α (עבור $\alpha\in\mathbb{R}$), וההופכיות שלהן: $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, $\log_a x$ והשורשים $\sqrt[n]{x}$ (עבור $n\in\mathbb{N}$). **צירוף של פונקציות אלמנטריות** בשני משתנים הוא פונקציה $f(x,y)$ שמתקבלת מהמשתנים x ו־y, מקבועים ומפונקציות אלמנטריות במספר סופי של פעולות חשבון (סכום, הפרש, מכפלה ומנה) ושל הרכבות. תחום ההגדרה שלו הוא קבוצת כל הנקודות $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ שבהן כל השלבים מוגדרים.

צירוף כזה דיפרנציאבילי בכל נקודה (x_0,y_0) שיש לה סביבה המוכלת בתחום ההגדרה שלו, ושבה כל פונקציה אלמנטרית בבנייה שלו מופעלת על ערך שבו היא גזירה. בקורס משתמשים בעובדה זו בלי הוכחה.

החריגים הם נקודות שבהן פונקציה אלמנטרית מופעלת על ערך שבו היא אינה גזירה: למשל שורש, או חזקה x^α עם $0<\alpha<1$, של ביטוי שמתאפס בנקודה, או $\arcsin$ ו־$\arccos$ של ביטוי השווה בה ל־1 או ל־-1. בנקודות באלה בודקים דיפרנציאביליות לפי ההגדרה: הצירוף יכול להיות דיפרנציאבילי בהן, ויכול שלא להיות.

הגדרה 5.1.4 נגזרות חלקיות

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

- אם הגבול הבא קיים וסופי, הוא נקרא **הנגזרת החלקית של f לפי x** בנקודה (x_0,y_0):
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$
- אם הגבול הבא קיים וסופי, הוא נקרא **הנגזרת החלקית של f לפי y** בנקודה (x_0,y_0):
$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

מסקנה 5.1.5

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

- תהי $g_1(x)=f(x,y_0)$. אזי $f_x(x_0,y_0)$ קיימת אם ורק אם g_1 גזירה ב־x_0, ובמקרה זה $f_x(x_0,y_0)=g_1'(x_0)$.
- תהי $g_2(y)=f(x_0,y)$. אזי $f_y(x_0,y_0)$ קיימת אם ורק אם g_2 גזירה ב־y_0, ובמקרה זה $f_y(x_0,y_0)=g_2'(y_0)$.

במילים: כדי לחשב את $f_x(x_0,y_0)$ מקבעים $y=y_0$ וגוזרים לפי x, בנקודה x_0, את הפונקציה במשתנה אחד שמתקבלת. כדי לחשב את $f_y(x_0,y_0)$ מקבעים $x=x_0$ וגוזרים לפי y בנקודה y_0.

טענה 5.1.6

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ויהיו $A,B,C\in\mathbb{R}$ כך שהמישור $g(x,y)=Ax+By+C$ מקיים את התנאי בהגדרה 5.1.3. אזי הנגזרות החלקיות $f_x(x_0,y_0)$ ו־$f_y(x_0,y_0)$ קיימות, ומתקיים $A=f_x(x_0,y_0)$ ו־$B=f_y(x_0,y_0)$.

הגדרה 5.1.7 המישור המשיק

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

המישור המשיק לגרף של f בנקודה (x_0,y_0) הוא המישור $z=Ax+By+C$ שבו $A=f_x(x_0,y_0)$ ו־$B=f_y(x_0,y_0)$ (המקדמים מהגדרת הדיפרנציאביליות, טענה 5.1.6), ושעובר בנקודה $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

מסקנה 5.1.8

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. אזי משוואת המישור המשיק לגרף של f בנקודה (x_0,y_0) היא

$$z-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

5.2 נגזרת כיוונית וגרדיאנט

הגדרה 5.2.1 נגזרת כיוונית

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ויהי $\hat{v}\in\mathbb{R}^2$ וקטור כך ש $\hat{v}\neq(0,0)$. אם הגבול הבא קיים וסופי, הוא נקרא **הנגזרת הכיוונית** של f בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\hat{v}$:

$$f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f\big((x_0,y_0)+t\hat{v}\big)-f(x_0,y_0)}{t\,\|\hat{v}\|}.$$

ובאופן שקול, בהצבה $s=t\|\hat{v}\|$, עם וקטור היחידה $\hat{u}=\frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}$ בכיוון $\hat{v}$:

$$f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)=\lim_{s\to0}\frac{f\big((x_0,y_0)+s\hat{u}\big)-f(x_0,y_0)}{s}.$$

טענה 5.2.2

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ויהי $\hat{v}\in\mathbb{R}^2$ וקטור כך ש $\hat{v}\neq(0,0)$. אזי הנגזרת הכיוונית $f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)$ קיימת, ומתקיים

$$f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\big)\cdot\frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}.$$

במילים: השיפוע של פונקציה דיפרנציאבילית בכיוון $\hat{v}$ שווה לשיפוע של המישור המשיק בכיוון זה.

הגדרה 5.2.3 גרדיאנט

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ כך שהנגזרות החלקיות $f_x(x_0,y_0)$ ו־$f_y(x_0,y_0)$ קיימות. **הגרדיאנט** של f בנקודה (x_0,y_0) הוא הווקטור

$$\nabla f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\big).$$

טענה 5.2.4

סרטון הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ויהי $\hat{v}\in\mathbb{R}^2$ וקטור כך ש $\hat{v}\neq(0,0)$. אזי:

- אם $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$, מתקיים

$$f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}=\|\nabla f(x_0,y_0)\|\cos\theta,$$

  כאשר θ היא הזווית בין הווקטורים $\nabla f(x_0,y_0)$ ו־$\hat{v}$.
- מתקיים $|f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)|\leq\|\nabla f(x_0,y_0)\|$.

מסקנה 5.2.5

סרטון הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ כך ש $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$. אזי לכל וקטור $\hat{v}\in\mathbb{R}^2$ כך ש $\hat{v}\neq(0,0)$:

(א) $f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)\leq\|\nabla f(x_0,y_0)\|$, ושוויון מתקיים אם ורק אם $\hat{v}$ בכיוון הגרדיאנט, כלומר $\hat{v}=c\,\nabla f(x_0,y_0)$ עבור $c>0$ כלשהו.

(ב) $f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)\geq-\|\nabla f(x_0,y_0)\|$, ושוויון מתקיים אם ורק אם $\hat{v}$ בכיוון המנוגד לגרדיאנט, כלומר $\hat{v}=c\,\nabla f(x_0,y_0)$ עבור $c<0$ כלשהו.

(ג) $f'_{\hat{v}}(x_0,y_0)=0$ אם ורק אם $\hat{v}$ מאונך לגרדיאנט, כלומר $\hat{v}\cdot\nabla f(x_0,y_0)=0$.

במילים: הגרדיאנט מצביע בתחום לכיוון העלייה התלולה ביותר, ואורכו הוא השיפוע המקסימלי; מינוס הגרדיאנט הוא כיוון הירידה התלולה ביותר; בכיוון המאונך לגרדיאנט הנגזרת מתאפסת.

שיטה 5.2.6 שיטת הירידה התלולה ביותר

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה. בוחרים נקודת התחלה (x_0,y_0) וגודל צעד $h>0$, ומגדירים באופן רקורסיבי

$$(x_{n+1},y_{n+1})=(x_n,y_n)-h\cdot\frac{\nabla f(x_n,y_n)}{\|\nabla f(x_n,y_n)\|},$$

כל עוד $\nabla f(x_n,y_n)$ קיים ושונה מ־$(0,0)$.

במילים: בכל צעד הולכים מרחק h בכיוון ההפוך לגרדיאנט, שהוא כיוון הירידה התלולה ביותר (מסקנה 5.2.5), כדי לחפש נקודה שבה ערך f נמוך (gradient descent).

5.3 כלל השרשרת וקווי גובה

משפט 5.3.1 כלל השרשרת

סרטון הוכחה בסרטון

יהי $t_0\in\mathbb{R}$, תהיינה $x(t)$ ו־$y(t)$ פונקציות גזירות ב־t_0, ותהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x(t_0),y(t_0))$. תהי $h(t)=f(x(t),y(t))$. אזי h גזירה ב־t_0 ומתקיים

$$h'(t_0)=f_x\big(x(t_0),y(t_0)\big)\,x'(t_0)+f_y\big(x(t_0),y(t_0)\big)\,y'(t_0).$$

הגדרה 5.3.2 קו גובה

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ויהי $c \in \mathbb{R}$. **קו הגובה** של f בגובה c הוא הקבוצה

$$D_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}.$$

הגדרה 5.3.3 פונקציה סתומה

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, יהי $c \in \mathbb{R}$, ותהי $y(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$. אומרים ש $y(x)$ **נתונה באופן סתום** על ידי המשוואה $f(x,y) = c$ (משוואת קו הגובה D_c), או ש $y(x)$ היא **פונקציה סתומה**, אם $f(x,y(x)) = c$ לכל $x \in I$.

במילים: הגרף של $y(x)$ מעל הקטע I מוכל בקו הגובה D_c.

טענה 5.3.4 גזירה סתומה

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, יהי $c \in \mathbb{R}$, ותהי $y(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח I, הנתונה באופן סתום על ידי המשוואה $f(x,y) = c$ בקטע I. נניח ש f דיפרנציאבילית בנקודה $(x,y(x))$ לכל $x \in I$. אזי לכל $x \in I$ מתקיים

$$f_x\big(x,y(x)\big) + f_y\big(x,y(x)\big)\,y'(x) = 0.$$

טענה 5.3.5

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, יהי $c \in \mathbb{R}$, ותהיינה $x(t)$ ו־$y(t)$ פונקציות גזירות בקטע פתוח I כך ש $f(x(t),y(t)) = c$ לכל $t \in I$. נסמן $\hat{r}(t) = (x(t),y(t))$ ו־$\hat{r}'(t) = (x'(t),y'(t))$, ונניח ש f דיפרנציאבילית בנקודה $\hat{r}(t)$ לכל $t \in I$. אזי לכל $t \in I$ מתקיים

$$\nabla f\big(\hat{r}(t)\big) \cdot \hat{r}'(t) = 0.$$

במילים: הגרדיאנט של f מאונך לקווי הגובה של f: הוא מאונך לווקטור המשיק $\hat{r}'(t)$ של כל מסלול גזיר שעובר בתוך קו הגובה D_c.

5.4 פולינום טיילור בשני משתנים

סימון 5.4.1 נגזרות חלקיות מסדר שני

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה. **הנגזרות החלקיות מסדר שני** של f הן הנגזרות החלקיות של הפונקציות f_x ו־f_y, ומסמנים

$$f_{xx} = (f_x)_x, \qquad f_{xy} = (f_x)_y, \qquad f_{yx} = (f_y)_x, \qquad f_{yy} = (f_y)_y,$$

בכל נקודה שבה הנגזרת החלקית שבאגף ימין קיימת. ב־f_{xy} גוזרים קודם לפי x ואחר כך לפי y, וב־f_{yx} קודם לפי y ואחר כך לפי x.

משפט 5.4.2 שוויון הנגזרות המעורבות

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ותהי U סביבה של (x_0,y_0). נניח ש f דיפרנציאבילית בכל נקודה של U, ושהנגזרות החלקיות f_{xy} ו־f_{yx} קיימות ורציפות בכל נקודה של U. אזי $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ לכל $(x,y)\in U$.

הערה: אלה תנאים מספיקים, והם מה שנדרש בהוכחה דרך משפט גרין. השוויון בנקודה (x_0,y_0) נכון גם בתנאים חלשים יותר: מספיק ש f_{xy} ו־f_{yx} קיימות בכל נקודה של U ורציפות בנקודה (x_0,y_0) (משפט שוורץ, בהוכחה אחרת שלא ראינו).

הגדרה 5.4.3 פולינום טיילור מסדר שני

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ותהי U סביבה של (x_0,y_0). נניח ש f דיפרנציאבילית בכל נקודה של U, ושכל הנגזרות החלקיות מסדר שני של f קיימות ורציפות בכל נקודה של U (ולכן, לפי משפט 5.4.2, מתקיים $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$). **פולינום טיילור מסדר שני** של f סביב הנקודה (x_0,y_0) הוא

$$\begin{aligned}P_2(x,y)=f(x_0,y_0)&+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\&+\frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\&\qquad+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big).\end{aligned}$$

במילים: ליד הנקודה (x_0,y_0) מתקיים $f(x,y)\approx P_2(x,y)$: זה הקירוב של f על ידי פולינום ממעלה שנייה.

טענה 5.4.4

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ותהי U סביבה של (x_0,y_0) שבה f מקיימת את ההנחות של הגדרה 5.4.3. יהיו $h,k\in\mathbb{R}$ כך ש $(x_0+h,y_0+k)\in U$, ונסמן $\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$. אזי:

(א) $\varphi(0)=f(x_0,y_0)$ ו־$\varphi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$, ובן

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=f_x(x_0,y_0)\,h+f_y(x_0,y_0)\,k,\\\varphi''(0)&=f_{xx}(x_0,y_0)\,h^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\,hk+f_{yy}(x_0,y_0)\,k^2.\end{aligned}$$

(ב) פולינום טיילור מסדר שני של φ סביב 0, בנקודה $t=1$, שווה ל־$P_2(x_0+h,y_0+k)$:

$$\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2}=P_2(x_0+h,y_0+k).$$

(ג) אם בנוסף φ גזירה שלוש פעמים בקטע פתוח המכיל את $[0,1]$, אזי קיים $c\in(0,1)$ שעבורו

$$f(x_0+h,y_0+k)=P_2(x_0+h,y_0+k)+\frac{\varphi'''(c)}{3!}.$$

6 קיצון בשני משתנים

6.1 קיצון מקומי

הגדרה 6.1.1 מקסימום מקומי, מינימום מקומי, קיצון מקומי

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- (x_0,y_0) נקראת **מקסימום מקומי** של f אם קיים $r>0$ כך שלכל נקודה (x,y) בעיגול $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ מתקיים $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$:

$$\exists r>0 \;\; \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \;\; (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2 \;\Rightarrow\; f(x,y)\le f(x_0,y_0).$$

- (x_0,y_0) נקראת **מינימום מקומי** של f אם קיים $r>0$ כך שלכל נקודה (x,y) בעיגול $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ מתקיים $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$.
- (x_0,y_0) נקראת **נקודת קיצון מקומית** של f אם היא מקסימום מקומי או מינימום מקומי.

במילים: הסביבה היא עיגול שלם שמרכזו (x_0,y_0), ולכן נקודה על שפת תחום ההגדרה של f אינה נקודת קיצון מקומית.

משפט 6.1.2 פרמה

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, ותהי $f(x,y)$ פונקציה שהנגזרות החלקיות שלה $f_x(x_0,y_0)$ ו־$f_y(x_0,y_0)$ קיימות.

אם (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומית של f, אזי $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$, כלומר $f_x(x_0,y_0)=0$ ו־$f_y(x_0,y_0)=0$.

ההפך אינו נכון: ייתכן ש $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$ אך (x_0,y_0) אינה נקודת קיצון מקומית של f.

הגדרה 6.1.3 נקודה חשודה

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה, ותהי $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ נקודה שבה הנגזרות החלקיות $f_x(x_0,y_0)$ ו־$f_y(x_0,y_0)$ קיימות. הנקודה (x_0,y_0) נקראת **נקודה חשודה** (לקיצון מקומי) של f אם $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$.

הגדרה 6.1.4 נקודת אוכף

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה. נקודה חשודה של f שאינה נקודת קיצון מקומית של f נקראת **נקודת אוכף** של f.

סימון 6.1.5 Δ

סרטון

תהי $f(x,y)$ פונקציה. בכל נקודה $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ שבה הנגזרות החלקיות מסדר שני f_{xx}, f_{xy} ו־f_{yy} קיימות, נסמן

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y).$$

משפט 6.1.6 מבחן הנגזרת השנייה

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, ותהי $f(x,y)$ פונקציה שהנגזרות החלקיות שלה מסדר שני קיימות ורציפות בסביבה של (x_0,y_0), כך ש $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$.

(א) אם $\Delta(x_0,y_0)>0$ ו־$f_{xx}(x_0,y_0)>0$, אזי (x_0,y_0) מינימום מקומי של f.

(ב) אם $\Delta(x_0,y_0)>0$ ו־$f_{xx}(x_0,y_0)<0$, אזי (x_0,y_0) מקסימום מקומי של f.

(ג) אם $\Delta(x_0,y_0)<0$, אזי (x_0,y_0) נקודת אוכף של f.

במילים: אם $\Delta(x_0,y_0)=0$, המבחן אינו אומר דבר: הנקודה יכולה להיות מינימום מקומי, מקסימום מקומי או נקודת אוכף.

6.2 קיצון מוחלט

הגדרה 6.2.1 מקסימום ומינימום בתחום (קיצון מוחלט)

סרטון

תהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת ב־D.

- אם לקבוצה $\{f(x,y)\mid(x,y)\in D\}$ יש מקסימום, הוא נקרא **המקסימום** של f ב־D.
- אם לקבוצה $\{f(x,y)\mid(x,y)\in D\}$ יש מינימום, הוא נקרא **המינימום** של f ב־D.
- המקסימום והמינימום של f ב־D נקראים **קיצון מוחלט** של f ב־D. נקודה $(x_1,y_1)\in D$ שבה $f(x_1,y_1)$ הוא המקסימום או המינימום של f ב־D נקראת **נקודת קיצון מוחלט** של f ב־D.

הערה: תחום סגור וחסום, שפה ונקודה פנימית

סרטון

בקורס לא מגדירים במדויק מה זה תחום, מה זה תחום סגור וחסום, מה זו השפה של תחום ומה זו נקודה פנימית. יש לכך הגדרות מדויקות, אבל כאן נשענים על האינטואיציה: השפה של התחום היא ה"קצה" שלו, ונקודה פנימית היא נקודה של התחום שאינה על השפה. קבוצה סגורה היא קבוצה שמכילה את כל השפה שלה, וקבוצה חסומה היא קבוצה שמוכלת בעיגול בלשהו. למשל, העיגול $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ הוא תחום סגור וחסום, והשפה שלו היא המעגל $x^2+y^2=1$; העיגול $x^2+y^2<1$ חסום, אבל אינו סגור.

משפט 6.2.2 ויירשטראס

סרטון

תהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה סגורה וחסומה שאינה ריקה, ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של D.

אזי f מקבלת מקסימום ומינימום ב־D.

בלומר, קיימות נקודות $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$ כך ש $f(x_2,y_2)\le f(x,y)\le f(x_1,y_1)$ לכל $(x,y)\in D$.

טענה 6.2.3

סרטון

תהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$, תהי $f(x,y)$ פונקציה, ותהי (x_1,y_1) נקודה פנימית של D שהיא נקודת קיצון מוחלט של f ב־D. אזי:

- (x_1,y_1) נקודת קיצון מקומית של f.
- אם הנגזרות החלקיות $f_x(x_1,y_1)$ ו־$f_y(x_1,y_1)$ קיימות, אזי (x_1,y_1) נקודה חשודה של f.

שיטה 6.2.4 מציאת נקודות חשודות על השפה בהצבה

סרטון

תהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ותהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה של השפה של D. נניח שהשפה של D היא איחוד של גרפים של פונקציות של x (ענפים), $y = y_1(x), \dots, y = y_k(x)$, באשר כל y_i מוגדרת בקטע סגור $[a_i,b_i]$ וגזירה בקטע הפתוח (a_i,b_i). כדי למצוא את הנקודות החשודות על השפה (הנקודות שבהן f עשויה לקבל את המקסימום או את המינימום שלה על השפה):

- לכל ענף מציבים $y = y_i(x)$ ב־f ומקבלים פונקציה של המשתנה x בלבד:

$$h_i(x) = f\big(x, y_i(x)\big), \qquad x \in [a_i,b_i].$$

הנקודות $\big(x, y_i(x)\big)$, עבור $x \in (a_i,b_i)$, שבהן $h_i'(x) = 0$, הן נקודות חשודות על השפה.

- נקודות החיבור בין הענפים, כלומר נקודות הקצה $\big(a_i, y_i(a_i)\big)$ ו־$\big(b_i, y_i(b_i)\big)$ של הענפים, הן גם נקודות חשודות על השפה.

שיטה 6.2.5 כופלי לגראנז'

סרטון

הוכחה בסרטון

תהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ותהיינה $f(x,y)$ ו־$g(x,y)$ פונקציות שהנגזרות החלקיות שלהן קיימות ורציפות בכל נקודה של $\mathbb{R}^2$, כך שהשפה של D היא קו הגובה של g בגובה 0, כלומר $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$. הנקודות החשודות על השפה של D (הנקודות שבהן f עשויה לקבל את המקסימום או את המינימום שלה על השפה) הן:

- הנקודות (x,y) שבהן $g(x,y) = 0$ ו־$\nabla g(x,y) = (0,0)$;
- הנקודות (x,y) שעבורן קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda\, g_x(x,y), \\ f_y(x,y) = \lambda\, g_y(x,y), \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

כלומר $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ ו־$g(x,y) = 0$.

במילים: בנקודת קיצון של f על השפה שבה $\nabla g \neq (0,0)$, הגרדיאנטים ∇f ו־∇g מקבילים, כי שניהם מאונכים לשפה. בנקודות שבהן $\nabla g = (0,0)$ אין לכך הצדקה, ולכן הן נבדקות בנפרד.

שיטה 6.2.6 מציאת קיצון מוחלט

סרטון

סרטון הוכחה בסרטון

תהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה סגורה וחסומה שאינה ריקה, ותהיינה $f(x,y)$ ו־$g(x,y)$ פונקציות שהנגזרות החלקיות שלהן קיימות ורציפות בכל נקודה של $\mathbb{R}^2$, כך שהשפה של D היא קו הגובה של g בגובה 0, כלומר $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$. לפי משפט ויירשטראס, f מקבלת ב־D מקסימום ומינימום. כדי למצוא אותם:

(א) מוצאים את הנקודות החשודות של f בפנים התחום, כלומר פותרים את המשוואה $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ושומרים רק את הפתרונות שהם נקודות פנימיות של D.

(ב) מוצאים את הנקודות על השפה של D שבהן $\nabla g(x,y) = (0,0)$.

(ג) מוצאים בעזרת כופלי לגראנז' את הנקודות (x,y) על השפה של D שעבורן קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$.

(ד) מציבים ב־f את כל הנקודות שנמצאו בשלושת השלבים הקודמים. הערך הגדול ביותר שמתקבל הוא המקסימום של f ב־D, והערך הקטן ביותר הוא המינימום של f ב־D.

הערה: שפה המורכבת מכמה חלקים

סרטון

לעיתים מחלקים את השפה של התחום לכמה חלקים, כמו למשל צלעות של מצולע. כל נקודת חיתוך בין שני חלקים היא נקודה חשודה על השפה, אוטומטית.

7 אינטגרלים כפולים ומשולשים

בקורס לא ניתנה הגדרה מדויקת לאינטגרל הכפול ולאינטגרל המשולש (ההגדרה המדויקת היא בעזרת סכומי רימן), ולכן הם מוצגים בהערות. האינטגרלים הקוויים והמשטחיים (פרקים 8 ו־9) מוגדרים בעזרת פרמטריזציה, בנוסחאות שנלמדו לחישובם.

מפרק זה מופיעות גם פונקציות של שלושה משתנים, $f(x,y,z)$. הסביבה, הרציפות בנקודה והנגזרות החלקיות מוגדרות להן כמו בפרקים 4 ו־5, עם הכדור הפתוח שמרכזו (x_0,y_0,z_0) ורדיוסו δ במקום העיגול. האורך של וקטור במרחב הוא $\|(a,b,c)\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

7.1 אינטגרל כפול ומשפט פוביני

הערה: האינטגרל הכפול

סרטון

תהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת ב־D. **האינטגרל הכפול** של f על D מסומן $\iint_D f$ או $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. בקורס לא נתנו לו הגדרה מדויקת, אלא משמעות:

- אם $f \geq 0$ ב־D, האינטגרל $\iint_D f$ הוא הנפח מתחת לגרף של f, מעל D.
- אם חושבים על D בעל משטח ועל f בעל פונקציית הצפיפות שלו, האינטגרל $\iint_D f$ הוא המסה של המשטח.
- האינטגרל $\iint_D 1\,dx\,dy$ הוא השטח של D.
- אם D מוכלת במלבן U, אזי $\iint_D f = \iint_U \hat{f}$, כאשר $\hat{f}$ היא ההרחבה של f באפס:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \in U \setminus D. \end{cases}$$

משפט 7.1.1 פוביני

סרטון

סרטון הוכחה בסרטון

יהיו $a < b$ ו־$c < d$ מספרים ממשיים, יהי D המלבן $\{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של D. אזי

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

7.2 תחום סטנדרטי

הגדרה 7.2.1 תחום סטנדרטי

סרטון

- קבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת **תחום סטנדרטי לפי** x אם קיימים מספרים ממשיים $a < b$ ופונקציות g_1, g_2 רציפות בקטע הסגור $[a,b]$, כך ש $g_1(x) \le g_2(x)$ לכל $x \in [a,b]$, ומתקיים

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

הצגה כזו של D נקראת **ייצוג סטנדרטי לפי** x של D.

- קבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת **תחום סטנדרטי לפי** y אם קיימים מספרים ממשיים $c < d$ ופונקציות h_1, h_2 רציפות בקטע הסגור $[c,d]$, כך ש $h_1(y) \le h_2(y)$ לכל $y \in [c,d]$, ומתקיים

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

הצגה כזו של D נקראת **ייצוג סטנדרטי לפי** y של D.

עיקרון: העבודה העיקרית היא על התחום

סרטון

באינטגרלים "רגילים" בחדו"א 1 עיקר העבודה היא על הפונקציה: למצוא את הקדומה שלה.
באינטגרלים מרובי משתנים עיקר העבודה היא על התחום.

טענה 7.2.2

סרטון

הוכחה בסרטון

(א) יהי D תחום סטנדרטי לפי x, עם הייצוג הסטנדרטי

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של D. אזי

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(ב) יהי D תחום סטנדרטי לפי y, עם הייצוג הסטנדרטי

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של D. אזי

$$\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

שיטה 7.2.3 שינוי סדר האינטגרציה

סרטון

יהי D תחום סטנדרטי לפי x וגם לפי y, עם הייצוגים הסטנדרטיים

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$
$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של D. לפי הטענה הקודמת

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy,$$

ולעיתים רק באחד משני הסדרים האינטגרל הפנימי ניתן לחישוב בעזרת פונקציה קדומה שהיא צירוף של פונקציות אלמנטריות. לכן:

- מציגים את D באופן סטנדרטי לפי x וגם באופן סטנדרטי לפי y. בכל ייצוג, עבור משתנה אחד מחפשים חסם תחתון וחסם עליון בכל התחום, ועבור המשתנה השני מחפשים חסמים בהינתן ערך מסוים של המשתנה הראשון.
- מחשבים את $\iint_D f$ בסדר האינטגרציה שבו החישוב אפשרי.

7.3 שינוי קואורדינטות

הגדרה 7.3.1 קואורדינטות קוטביות

סרטון

לכל $r \ge 0$ ולכל $\theta \in [0, 2\pi]$ מתאימים את הנקודה

$$(x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

ההתאמה הזו נקראת **קואורדינטות קוטביות** (פולריות).

במילים: r הוא המרחק של (x,y) מראשית הצירים, ו־θ היא הזווית בין הווקטור (x,y) לבין הצד החיובי של ציר ה־x, נגד כיוון השעון.

הגדרה 7.3.2 יעקוביאן

סרטון

- תהיינה $x(u,v)$ ו־$y(u,v)$ פונקציות, ותהי $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ נקודה שבה הנגזרות החלקיות x_u, x_v, y_u ו־y_v קיימות. **היעקוביאן** של ההתאמה $(u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ בנקודה (u,v) הוא הדטרמיננטה

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{pmatrix},$$

  ו־$|J(u,v)|$ הוא הערך המוחלט שלה.

- תהיינה $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ ו־$z(u,v,w)$ פונקציות, ותהי $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ נקודה שבה כל הנגזרות החלקיות שלהן קיימות. **היעקוביאן** של ההתאמה $(u,v,w) \mapsto (x,y,z)$ בנקודה (u,v,w) הוא הדטרמיננטה

$$J(u,v,w) = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix},$$

  באשר הנגזרות החלקיות מחושבות בנקודה (u,v,w), ו־$|J(u,v,w)|$ הוא הערך המוחלט שלה.

משפט 7.3.3 שינוי קואורדינטות

סרטון
הוכחה בסרטון
המשך ההוכחה

תהי $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה סגורה וחסומה, ותהיינה $x(u,v)$ ו־$y(u,v)$ פונקציות שהנגזרות החלקיות שלהן קיימות ורציפות בכל נקודה של D'. תהי D התמונה של D' בהתאמה $(u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big)$.

נניח שקיימת קבוצה $Z \subseteq D'$ ששטחה אפס, כך שההתאמה חד־חד־ערכית ב־$D' \setminus Z$, ומתקיים $J(u,v) \neq 0$ לכל $(u,v) \in D' \setminus Z$.

תהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של D. אזי

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |J(u,v)|\,du\,dv.$$

מסקנה 7.3.4

סרטון

- היעקוביאן של הקואורדינטות הקוטביות מקיים $|J(r,\theta)| = r$ לכל $r \geq 0$ ו־$\theta \in [0, 2\pi]$.

הוכחה בסרטון

- תהי $D' \subseteq \{(r,\theta) \mid r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ קבוצה סגורה וחסומה, תהי D התמונה של D' בקואורדינטות קוטביות, ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של D. אזי

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta.$$

7.4 אינטגרל משולש

הערה: האינטגרל המשולש

סרטון

תהי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f(x,y,z)$ פונקציה המוגדרת ב־V. **האינטגרל המשולש** של f על V מסומן $\iiint_V f$ או $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. כמו לאינטגרל הכפול, בקורס לא נתנו לו הגדרה מדויקת, אלא משמעות:

- אם חושבים על V כעל גוף תלת־ממדי ועל f כעל פונקציית הצפיפות שלו, האינטגרל $\iiint_V f$ הוא המסה של הגוף.
- האינטגרל $\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz$ הוא הנפח של V.
- אם $V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$, כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום סטנדרטי לפי x או לפי y, h_1, h_2 רציפות בכל נקודה של D ו־$h_1 \le h_2$ ב־D, ו־f רציפה בכל נקודה של V, אזי

$$\iiint_V f = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

הגדרה 7.4.1 קואורדינטות כדוריות

סרטון

לכל $r \ge 0$, $\theta \in [0,\pi]$ ו־$\varphi \in [0,2\pi]$ מתאימים את הנקודה

$$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) \in \mathbb{R}^3.$$

ההתאמה הזו נקראת **קואורדינטות כדוריות**.

במילים: r הוא המרחק של (x,y,z) מראשית הצירים, θ היא הזווית בין הווקטור (x,y,z) לבין הצד החיובי של ציר ה־z, ו־φ היא הזווית בין הווקטור $(x,y,0)$ לבין הצד החיובי של ציר ה־x, נגד כיוון השעון (כמו בקואורדינטות קוטביות).

משפט 7.4.2

סרטון

תהי $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ קבוצה סגורה וחסומה, ותהיינה $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ ו־$z(u,v,w)$ פונקציות שהנגזרות החלקיות שלהן קיימות ורציפות בכל נקודה של V'. תהי V התמונה של V' בהתאמה

$$(u,v,w) \mapsto \big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big).$$

נניח שקיימת קבוצה $Z \subseteq V'$ שנפחה אפס, כך שההתאמה חד־חד־ערכית ב־$V' \setminus Z$, ומתקיים $J(u,v,w) \ne 0$ לכל $(u,v,w) \in V' \setminus Z$.

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של V. אזי

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$

מסקנה 7.4.3

סרטון

- היעקוביאן של הקואורדינטות הכדוריות מקיים $|J(r,\theta,\varphi)| = r^2 \sin\theta$ לכל $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi]$ ו־$\varphi \in [0,2\pi]$.
- תהי $V' \subseteq \{(r,\theta,\varphi) \mid r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ קבוצה סגורה וחסומה, תהי V התמונה של V' בקואורדינטות כדוריות, ותהי $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה בכל נקודה של V. אזי

$$\iiint_V f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

8 אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

8.1 אינטגרל קווי מסוג ראשון

הגדרה 8.1.1 פרמטריזציה ומסילה

סרטון

יהיו $a < b$ מספרים ממשיים, ותהי $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\hat{r}(t) = (x(t), y(t))$, או $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\hat{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, פונקציה רציפה.
נניח שקיימת חלוקה $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ של הקטע $[a,b]$ כך שבכל אחד מהקטעים $[t_{i-1}, t_i]$ לרכיבים של $\hat{r}$ יש נגזרות רציפות (בקצות הקטע: נגזרות חד־צדדיות).

- הקבוצה $C = \{\hat{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$ נקראת **מסילה**, ו־$\hat{r}$ נקראת **פרמטריזציה** של C.
- הנקודה $\hat{r}(a)$ נקראת **נקודת ההתחלה** של C, והנקודה $\hat{r}(b)$ נקראת **נקודת הסיום** של C (לפי $\hat{r}$). הפרמטריזציה $\hat{r}$ קובעת את **הכיוון** של C: הכיוון שבו $\hat{r}(t)$ נע כאשר t גדל.
- הפרמטריזציה $\hat{r}$ נקראת **סגורה** אם $\hat{r}(a) = \hat{r}(b)$, ואז אומרים ש C היא **מסילה סגורה**.
- הפרמטריזציה $\hat{r}$ נקראת **פשוטה** אם $\hat{r}(s_1) \neq \hat{r}(s_2)$ לכל $a \leq s_1 < s_2 \leq b$, פרט אולי ל־$s_1 = a$ ו־$s_2 = b$. מסילה שיש לה פרמטריזציה סגורה ופשוטה נקראת **מסילה סגורה פשוטה**.
- בנקודות $t_1, \ldots, t_{k-1}$ הנגזרת $\hat{r}'$ אינה בהכרח קיימת. אינטגרל על הקטע $[a,b]$ שמופיעה בו $\hat{r}'$ הוא סכום האינטגרלים על הקטעים $[t_{i-1}, t_i]$, עבור $1 \leq i \leq k$.

במילים: מסילה היא תמונה של קטע: חושבים על t כעל זמן, ועל $\hat{r}(t)$ כעל המקום, בזמן t, של מי שהולך לאורך הקו. בנקודות החלוקה יכולות להיות למסילה "פינות". בשיעורים לא הגדרנו מה זה קו; ההגדרה כאן כוללת רק את מה שצריך כדי לנסח במדויק את הנוסחאות ואת המשפטים של הפרק.

הגדרה 8.1.2 אינטגרל קווי מסוג ראשון

סרטון

תהי C מסילה עם פרמטריזציה $\hat{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ או $\hat{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, ותהי f פונקציה רציפה בכל נקודה של C. **האינטגרל הקווי מסוג ראשון** של f על C (לפי הפרמטריזציה $\hat{r}$) הוא

$$\int_C f\,dr=\int_a^b f(\hat{r}(t))\cdot\|\hat{r}'(t)\|\,dt.$$

כלומר:

(א) במישור, עבור $\hat{r}(t)=(x(t),y(t))$:

$$\int_C f\,dr=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

(ב) במרחב, עבור $\hat{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$:

$$\int_C f\,dr=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

במילים: אם $f\geq 0$ היא הגובה של גדר שהבסיס שלה הוא C, האינטגרל הוא שטח הגדר. אם f היא הצפיפות של חבל המונח לאורך C, האינטגרל הוא המסה של החבל. האינטגרל $\int_C 1\,dr$ הוא האורך של C.

משפט 8.1.3

סרטון

תהי C מסילה, ותהי f פונקציה רציפה בכל נקודה של C. תהיינה $\hat{r}_1$ ו־$\hat{r}_2$ פרמטריזציות פשוטות של C. אזי האינטגרל הקווי מסוג ראשון של f על C לפי $\hat{r}_1$ שווה לאינטגרל הקווי מסוג ראשון של f על C לפי $\hat{r}_2$.

במילים: האינטגרל אינו תלוי בבחירת הפרמטריזציה הפשוטה של המסילה, ולכן בסימון $\int_C f\,dr$ אין צורך לציין אותה.

8.2 אינטגרל קווי מסוג שני

הגדרה 8.2.1 שדה וקטורי

סרטון

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^2$. פונקציה $\hat{F}=(P,Q):A\to\mathbb{R}^2$, המתאימה לכל נקודה $(x,y)\in A$ את הווקטור $\hat{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, נקראת **שדה וקטורי** במישור.
- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^3$. פונקציה $\hat{F}=(P,Q,R):A\to\mathbb{R}^3$, המתאימה לכל נקודה $(x,y,z)\in A$ את הווקטור $\hat{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, נקראת **שדה וקטורי** במרחב.

הפונקציות P ו־Q (ובמרחב גם R) נקראות **הרכיבים** של $\hat{F}$.

הגדרה 8.2.2 אינטגרל קווי מסוג שני

סרטון

תהי C מסילה עם פרמטריזציה $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ויהי $\hat{F}$ שדה וקטורי במישור, או $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ו־$\hat{F}$ שדה וקטורי במרחב, ונניח שהרכיבים של $\hat{F}$ רציפים בכל נקודה של C. **האינטגרל הקווי מסוג שני** של $\hat{F}$ על C (לפי הפרמטריזציה $\hat{r}$, בכיוון שהיא קובעת) הוא

$$\int_C \hat{F}\, d\hat{r} = \int_a^b \hat{F}(\hat{r}(t)) \cdot \hat{r}'(t)\, dt,$$

כאשר $\cdot$ היא המכפלה הסקלרית.

במילים: אם $\hat{F}$ הוא כוח, האינטגרל הוא העבודה שהכוח עושה על גוף שנע לאורך C בכיוון שקובעת הפרמטריזציה. בעבודה לוקחים רק את רכיב הכוח בכיוון התנועה.

סימון 8.2.3

סרטון

תהי C מסילה עם פרמטריזציה $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\hat{r}(t) = (x(t), y(t))$, ויהי $\hat{F} = (P,Q)$ שדה וקטורי במישור שרכיביו רציפים בכל נקודה של C. מסמנים

$$\int_C P\, dx = \int_a^b P(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt,$$
$$\int_C Q\, dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt.$$

מתקיים

$$\int_C \hat{F}\, d\hat{r} = \int_C P\, dx + \int_C Q\, dy,$$

ואת הסכום הזה מסמנים גם $\int_C P\, dx + Q\, dy$.

טענה 8.2.4

סרטון

תהי C מסילה, ויהי $\hat{F}$ שדה וקטורי (במישור או במרחב, כמו C) שרכיביו רציפים בכל נקודה של C.

(א) אם $\hat{r}_1$ ו־$\hat{r}_2$ פרמטריזציות פשוטות של C שקובעות את אותו כיוון, אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\hat{F}$ על C לפי $\hat{r}_1$ שווה לאינטגרל הקווי מסוג שני של $\hat{F}$ על C לפי $\hat{r}_2$.

(ב) תהי $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ או $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ פרמטריזציה של C. את המסילה C בכיוון ההפוך, עם הפרמטריזציה $\hat{r}^-(t) = \hat{r}(a+b-t)$, $t \in [a,b]$, נסמן C^-. אזי

$$\int_{C^-} \hat{F}\, d\hat{r} = -\int_C \hat{F}\, d\hat{r}.$$

במילים: בין הפרמטריזציות הפשוטות, האינטגרל הקווי מסוג שני תלוי רק בכיוון של המסילה, והיפוך הכיוון הופך את הסימן שלו.

8.3 שדה משמר

הגדרה 8.3.1 שדה משמר

סרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ויהי $\hat{F} : A \to \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי במישור. אומרים ש $\hat{F}$ הוא **שדה משמר** אם קיימת פונקציה U, דיפרנציאבילית בכל נקודה של A, כך ש $\hat{F}(x,y) = (U_x(x,y), U_y(x,y))$ לכל $(x,y) \in A$.

משפט 8.3.2

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$, יהי $\hat{F} : A \to \mathbb{R}^2$ שדה משמר, ותהי U פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה של A כך ש $\hat{F} = (U_x, U_y)$ ב־A. תהי $C \subseteq A$ מסילה עם פרמטריזציה $\hat{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ונניח ש U_x ו־U_y רציפות בכל נקודה של C. אזי

$$\int_C \hat{F}\, d\hat{r} = U(\hat{r}(b)) - U(\hat{r}(a)).$$

במילים: העבודה של שדה משמר לאורך מסילה תלויה רק בנקודת ההתחלה ובנקודת הסיום שלה, ולא במסלול.

8.4 משפט גרין

סימון 8.4.1 $\oint$

סרטון

תהי C מסילה עם פרמטריזציה סגורה $\hat{r}$, ויהי $\hat{F}$ שדה וקטורי (במישור או במרחב, כמו C שרכיביו רציפים בכל נקודה של C. את האינטגרל הקווי מסוג שני של $\hat{F}$ על C מסמנים גם

$$\oint_C \hat{F}\, d\hat{r}.$$

משפט 8.4.2 גרין

סרטון
הוכחה בסרטון

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום ששפתו C היא מסילה סגורה פשוטה, ונכוון את C נגד כיוון השעון, כלומר כך שכאשר הולכים לאורך C התחום D נמצא משמאל. יהי $\hat{F} = (P,Q)$ שדה וקטורי במישור כך שהנגזרות החלקיות של P ושל Q קיימות ורציפות בכל נקודה של $D \cup C$. אזי

$$\oint_C \hat{F}\, d\hat{r} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy.$$

מסקנה 8.4.3

סרטון
הוכחה בסרטון

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$, יהי $\hat{F} : A \to \mathbb{R}^2$ שדה משמר, ותהי U פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה של A כך ש $\hat{F} = (U_x, U_y)$ ב־A. תהי $C \subseteq A$ מסילה עם פרמטריזציה סגורה, ונניח ש U_x ו־U_y רציפות בכל נקודה של C. אזי

$$\oint_C \hat{F}\, d\hat{r} = 0.$$

שיטה 8.4.4 חישוב אינטגרל קווי מסוג שני

סרטון

יהי $\hat{F} = (P,Q)$ שדה וקטורי במישור, ותהי $L \subseteq \mathbb{R}^2$ מסילה. יש שתי דרכים לחשב את $\int_L \hat{F}\, d\hat{r}$:

(א) למצוא פרמטריזציה של L, ולחשב באופן ישיר לפי ההגדרה.

(ב) להשלים את L במסילה L', מנקודת הסיום של L אל נקודת ההתחלה שלה, כך ש L ו־L' יחד הן השפה C של תחום חסום D, מכוונת נגד כיוון השעון; לחשב את $\oint_C \hat{F}\, d\hat{r}$ לפי משפט גרין, כשמתקיימות הנחותיו; ולהחסיר את מה שנוסף:

$$\int_L \hat{F}\, d\hat{r} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy - \int_{L'} \hat{F}\, d\hat{r}.$$

9 אינטגרלים משטחיים, משפט גאוס ומשפט סטוקס

9.1 אינטגרלים משטחיים

הגדרה 9.1.1 פרמטריזציה של משטח

סרטון

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום.

- תהיינה $x(u,v)$, $y(u,v)$ ו־$z(u,v)$ פונקציות שהנגזרות החלקיות שלהן קיימות ורציפות בכל נקודה של D, ותהי $\hat{s} : D \to \mathbb{R}^3$ הפונקציה $\hat{s}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. הקבוצה $M = \{\hat{s}(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ נקראת **משטח**, ו־$\hat{s}$ נקראת **פרמטריזציה** של M.
- תהי $f(x,y)$ פונקציה שהנגזרות החלקיות שלה קיימות ורציפות בכל נקודה של D. **הפרמטריזציה הטבעית** של גרף f, המשטח $\{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$, היא

$$\hat{s}(x,y) = (x,y,f(x,y)), \qquad (x,y) \in D.$$

במילים: משטח הוא תמונה של תחום במישור, כמו שמסילה היא תמונה של קטע: למשטח יש שני פרמטרים, ולמסילה פרמטר אחד.

עיקרון: הפרמטריזציה היא העיקר

סרטון

כמו באינטגרל קווי, העיקר באינטגרל משטחי הוא הפרמטריזציה של המשטח: בשביל חישוב, תמיד מוצאים פרמטריזציה של המשטח.

הגדרה 9.1.2 אינטגרל משטחי מסוג ראשון

סרטון

יהי M משטח עם פרמטריזציה $\hat{s} : D \to \mathbb{R}^3$, ותהי f פונקציה רציפה בכל נקודה של M. **האינטגרל המשטחי מסוג ראשון** של f על M (לפי הפרמטריזציה $\hat{s}$) הוא

$$\iint_M f \, dS = \iint_D f(\hat{s}(u,v)) \cdot \|\hat{s}_u(u,v) \times \hat{s}_v(u,v)\| \, du \, dv,$$

כאשר $\hat{s}_u = (x_u, y_u, z_u)$ ו־$\hat{s}_v = (x_v, y_v, z_v)$, ו־$\times$ היא המכפלה הווקטורית.

במילים: אם f היא צפיפות, האינטגרל הוא המסה של המשטח. האינטגרל $\iint_M 1 \, dS$ הוא שטח הפנים של M.

הערה: פרמטריזציה ושינוי קואורדינטות

סרטון

פרמטריזציה של משטח אינה שינוי קואורדינטות, ואין בה יעקוביאן. כדי להבדיל ביניהם שואלים: האם היה אינטגרל אחד והחלפנו אותו באחר (שינוי קואורדינטות), או שעוד לא ניסחנו את האינטגרל הראשון (פרמטריזציה)?

טענה 9.1.3

סרטון

סרטון הוכחה בסרטון

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום, תהי $f(x,y)$ פונקציה שהנגזרות החלקיות שלה קיימות ורציפות בכל נקודה של D, ותהי $\hat{s}(x,y) = (x,y,f(x,y))$, $(x,y) \in D$, הפרמטריזציה הטבעית של גרף f. אזי לכל $(x,y) \in D$ מתקיים

$$\hat{s}_x \times \hat{s}_y = (-f_x, -f_y, 1), \qquad \|\hat{s}_x \times \hat{s}_y\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1},$$

באשר $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$ והנגזרות החלקיות של f מחושבים בנקודה (x,y).

עיקרון: שטח הפנים של "עוגה"

סרטון

שטח הפנים של "עוגה" בנוי משטח הרצפה, שטח הקירות ושטח התקרה. אם הרצפה היא התחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$, השפה שלו היא המסילה C, וגובה העוגה מעל הנקודה $(x,y) \in D$ הוא $f(x,y) \geq 0$, אזי:

- שטח הרצפה הוא האינטגרל הכפול $\iint_D 1\,dx\,dy$;
- שטח הקירות הוא האינטגרל הקווי מסוג ראשון $\int_C f\,dr$;
- שטח התקרה הוא האינטגרל המשטחי מסוג ראשון $\iint_M 1\,dS$, באשר M גרף f מעל D.

הגדרה 9.1.4 אינטגרל משטחי מסוג שני

סרטון

יהי M משטח עם פרמטריזציה $\hat{s} : D \to \mathbb{R}^3$, ויהי $\hat{F}$ שדה וקטורי במרחב שרכיביו רציפים בכל נקודה של M. בוחרים **כיוון לנורמל** $\hat{n}$ של M: בכל נקודה $\hat{s}(u,v)$ שבה $\hat{s}_u \times \hat{s}_v \neq (0,0,0)$, הווקטור $\hat{n}$ הוא וקטור היחידה בכיוון של $\hat{s}_u \times \hat{s}_v$, או וקטור היחידה בכיוון ההפוך לו, באותה בחירה בכל הנקודות. **האינטגרל המשטחי מסוג שני** של $\hat{F}$ על M בכיוון $\hat{n}$ הוא

$$\iint_M \hat{F} \cdot \hat{n}\,dS = \pm \iint_D \hat{F}(\hat{s}(u,v)) \cdot \big(\hat{s}_u(u,v) \times \hat{s}_v(u,v)\big)\,du\,dv,$$

עם הסימן $+$ אם $\hat{n}$ בכיוון של $\hat{s}_u \times \hat{s}_v$, ועם הסימן $-$ אם $\hat{n}$ בכיוון ההפוך.

אם $M = M_1 \cup \cdots \cup M_k$, כאשר $M_1, \ldots, M_k$ משטחים שנפגשים זה עם זה רק לאורך מסילות, ועל כל אחד מהם נבחר כיוון לנורמל, מגדירים את $\iint_M \hat{F} \cdot \hat{n}\,dS$ בסכום האינטגרלים עליהם.

במילים: האינטגרל הוא השטף של $\hat{F}$ דרך M בכיוון $\hat{n}$: כמות הזרימה דרך המשטח בכיוון הנורמל. רק הרכיב של $\hat{F}$ בכיוון הנורמל תורם לשטף.

9.2 משפט גאוס ומשפט סטוקס

סימון 9.2.1 ∇ ודיברגנץ

סרטון

מסמנים

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

יהי $\hat{F} = (P,Q,R)$ שדה וקטורי במרחב, ותהי (x,y,z) נקודה שבה הנגזרות החלקיות של רכיבי $\hat{F}$ קיימות. **הדיברגנץ** של $\hat{F}$ בנקודה (x,y,z) הוא

$$\nabla \cdot \hat{F} = P_x + Q_y + R_z,$$

כשהנגזרות החלקיות מחושבות בנקודה (x,y,z).

משפט 9.2.2 גאוס (משפט הדיברגנץ)

סרטון

סרטון הובחה בסרטון

יהי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף חסום, שהמעטפת שלו M מורכבת ממספר סופי של משטחים שנפגשים זה עם זה רק לאורך מסילות, ונבחר את כיוון הנורמל $\hat{n}$ של M כלפי חוץ V. יהי $\hat{F}$ שדה וקטורי במרחב שהנגזרות החלקיות של רכיביו קיימות ורציפות בכל נקודה של $V \cup M$. אזי

$$\iint_M \hat{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \hat{F}\, dx\, dy\, dz.$$

עיקרון: השלמת המשטח

סרטון

כדי להשתמש במשפט גאוס, המשטח צריך להיות מעטפת שלמה של גוף. אם המשטח M אינו מעטפת שלמה, משלימים אותו במשטח T (למשל, חצי ספירה ברצפה שלה) כך ש M ו־T יחד הם המעטפת של גוף V, ומחסירים את מה שנוסף. כשמתקיימות ההנחות של משפט גאוס:

$$\iint_M \hat{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \hat{F}\, dx\, dy\, dz - \iint_T \hat{F} \cdot \hat{n}\, dS,$$

באשר הנורמל על M ועל T מכוון כלפי חוץ V.

הגדרה 9.2.3 רוטור

סרטון

יהי $\hat{F} = (P, Q, R)$ שדה וקטורי במרחב, ותהי (x, y, z) נקודה שבה הנגזרות החלקיות של רכיבי $\hat{F}$ קיימות. **הרוטור** של $\hat{F}$ בנקודה (x, y, z) הוא

$$\mathrm{rot}(\hat{F}) = \nabla \times \hat{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \big(R_y - Q_z,\, P_z - R_x,\, Q_x - P_y\big),$$

בשהנגזרות החלקיות מחושבות בנקודה (x, y, z).

הדטרמיננטה מחושבת פורמלית, לפי השורה הראשונה, ו־$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ הם וקטורי היחידה בכיווני הצירים x, y ו־z.

משפט 9.2.4 סטוקס

סרטון

יהי M משטח ששפתו C היא מסילה סגורה פשוטה, ונבחר כיוון לנורמל $\hat{n}$ של M. נכוון את C נגד כיוון השעון בשהראש בכיוון $\hat{n}$, כלומר כך שכאשר הולכים לאורך C והראש בכיוון $\hat{n}$, המשטח M נמצא משמאל. יהי $\hat{F}$ שדה וקטורי במרחב שהנגזרות החלקיות של רכיביו קיימות ורציפות בכל נקודה של $M \cup C$. אזי

$$\oint_C \hat{F}\, d\hat{r} = \iint_M \mathrm{rot}(\hat{F}) \cdot \hat{n}\, dS.$$

במילים: שפת המשטח היא הקו שבקצה המשטח. למשל, השפה של חצי הספירה העליונה היא המעגל שבתחתיתה; השפה של "צדפה" עולה ויורדת, והיא קו במרחב ולא בהכרח במישור; ולספירה שלמה אין שפה. זה ה"קצה" של המשטח, כמו השפה של תחום במישור. (מי שמכיר את ההגדרה המדויקת של שפה של קבוצה: לפיה כל נקודה של משטח במרחב היא נקודת שפה, כי היא קרובה כרצוננו לנקודות שמחוץ למשטח; שפת המשטח היא מושג אחר.)

מסקנה 9.2.5

סרטון הוכחה בסרטון

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חסום ששפתו C היא מסילה סגורה פשוטה, מבוונת נגד כיוון השעון, ויהי $\hat{F} = (P, Q)$ שדה וקטורי במישור כך שהנגזרות החלקיות של P ושל Q קיימות ורציפות בכל נקודה של $D \cup C$. נגדיר את המשטח $M = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in D\}$ עם הנורמל $\hat{n} = (0, 0, 1)$, את שפתו $L = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in C\}$ בכיוון של C, ואת השדה $\hat{G}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$. אזי $\mathrm{rot}(\hat{G}) = (0, 0, Q_x - P_y)$, ובן

$$\oint_L \hat{G}\, d\hat{r} = \oint_C \hat{F}\, d\hat{r}, \qquad \iint_M \mathrm{rot}(\hat{G}) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy.$$

לבן משפט סטוקס עבור M ו־$\hat{G}$ הוא משפט גרין עבור D ו־$\hat{F}$.

במילים: משפט גרין הוא המקרה הפרטי של משפט סטוקס למשטח שמובל במישור xy.